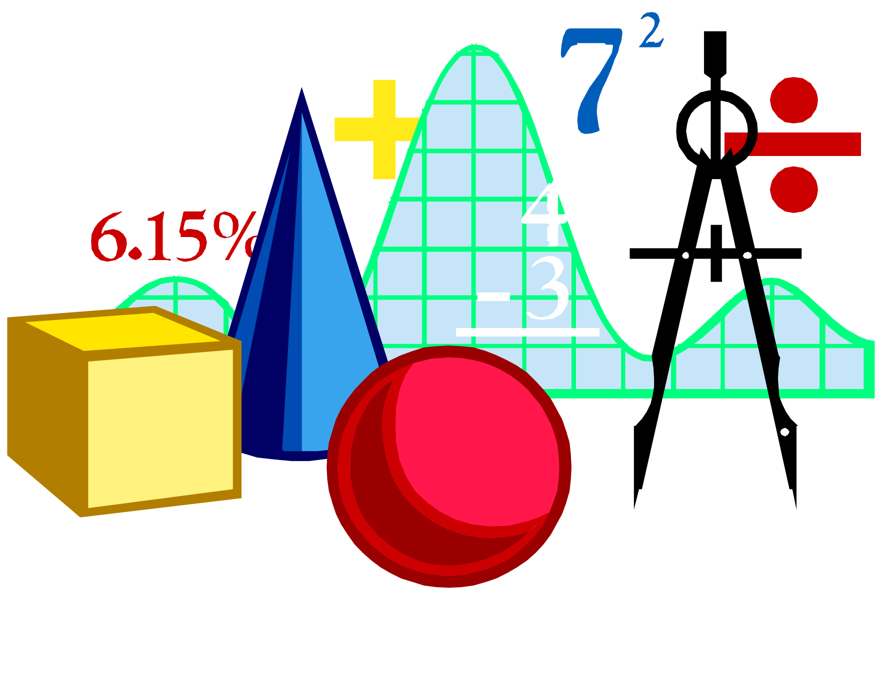
Formelsammlung

Mathematik

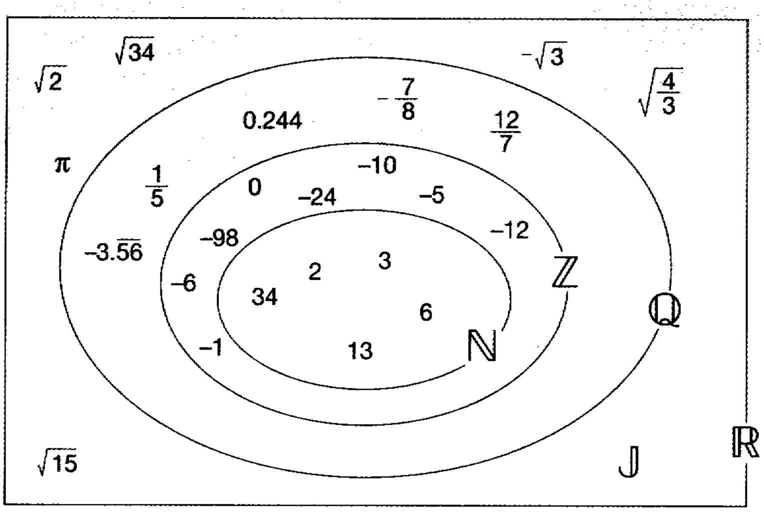


Algebra

1 Arithmetik

1.1 Zahlen, Terme, Ordnungsrelationen

1.1.1 Zahlenmengen



natürliche Zahlen $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \ldots\ldots\ldots\ldots\}$

ganze Zahlen $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots\ldots\}$

rationale Zahlen $\mathbb{Q} = \left\{\frac{a}{b} \,\middle|\, a, b \in \mathbb{Z} \text{ und } b \neq 0\right\}$

irrationale Zahlen $\mathbb{J}$

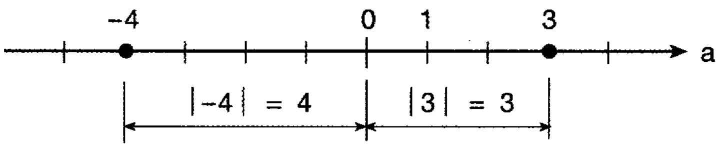
reelle Zahlen $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{J}$

1.1.2 Der Betrag einer Zahl

$$|\mathbf{a}| = \begin{cases} \mathbf{a}, & \textbf{falls} \quad \mathbf{a} \geq 0 \\ -\mathbf{a}, & \textbf{falls} \quad \mathbf{a} < 0 \end{cases} \qquad (\mathbf{a} \in \mathbb{R})$$

Geometrische Veranschaulichung von $|a|$ an der Zahlengeraden:

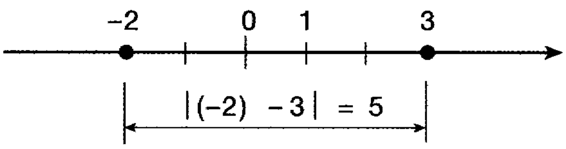
$|a|$ entspricht dem **Abstand** zwischen dem Bildpunkt von a und dem Nullpunkt:



Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ gilt:

$$|\mathbf{a} - \mathbf{b}| = |\mathbf{b} - \mathbf{a}| \quad ; \quad |\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}| = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \quad ; \quad \left|\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}}\right| = \frac{|\mathbf{a}|}{|\mathbf{b}|}, \ b \neq 0$$

Auf der Zahlengeraden bedeutet $|a - b|$ der Abstand zwischen den Bildpunkten von a und b.



1.1.3 Terme

Ein **Term** ist eine Zahl, eine Variable oder eine sinnvolle Zusammensetzung von Zahlen, Variablen, Operationszeichen und Klammern.

Beispiele: -2.1 ; 0 ; $\sqrt{5}$; a ; $-x$; A ;

$|m|$; $\sqrt{a-b}$; k^n $x(x+2y)-x:y$

Gegenbeispiele: $1:0$; $0:0$; $2<5$; $a+a=2a$

Mit **T(x)** bezeichnen wir einen Term, der die Variable x enthält.
Setzt man für x z.B. die Zahl 3 ein, so schreiben wir **T(3).**

Beispiele:

$T(x) = 2x^2 - 4x$ $\quad T(3) = 2 \cdot 3^2 - 4 \cdot 3 = 6$

$T(a;b) = a^b - 2ab$ $\quad T(2;3) = 2^3 - 2 \cdot 2 \cdot 3 = -4$

$T(1;1) = 1^1 - 2 \cdot 1 \cdot 1 = -1$

Tritt in einem Term dieselbe Variable mehrmals auf (z.B. $x^2 - 3x$), so muss sie jeweils mit derselben Zahl belegt werden.
Treten in einem Term verschiedene Variablen auf (z.B. $2a + 3b$), so dürfen diese mit verschiedenen oder mit gleichen Zahlen belegt werden.

Die Zahl **Null**

in der Multiplikation: $a \cdot 0 = 0$

in der Division: $0 : a = 0$, falls $a \neq 0$

$a : 0$ ist nicht definiert

1.1.4 Polynome

Beispiele: Polynom 1. Grades: x ; $2.6x$; $\frac{1}{3}x-\sqrt{2}$; $4(2x+11)$

allgemein: $\mathbf{a_1x + a_0}$

Polynom 2. Grades: $-12x^2$; $7u^2-3.9$; $x(x-6)$; $-8y^2+y-1.2$

allgemein: $\mathbf{a_2x^2 + a_1x + a_0}$

Polynom 3. Grades: $2k^3$; $2h^3-\sqrt{3}h$; $(2x-5)^3$; $x(x^2-3x)$

allgemein: $\mathbf{a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0}$

Gegenbeispiele:

$2x^2+\frac{1}{x}$ Variable x kommt im Nenner vor

$3a+8-\sqrt{a}$ Variable a ist unter der Wurzel

2^n+n^2 Variable n kommt im Exponenten vor

$|x|-5x+3$ Betrag der Variablen

Definition: Ein **Polynom in x** ist ein Term, der auf die folgende Form gebracht werden kann:

$$a_n\mathbf{x}^n + a_{n-1}\mathbf{x}^{n-1} + \ldots + a_2\mathbf{x}^2 + a_1\mathbf{x} + a_0 \qquad (1)$$

wobei $n \in \mathbb{N}$ und $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ und $a_n \neq 0$

Bezeichnungen:

- Die Zahlen $a_0, a_1, \ldots, a_n$ heissen **Koeffizienten.**
- Der höchste Exponent n gibt den **Grad** des Polynoms an.
- Der Term (1) heisst **Grundform** eines Polynoms.
  Beispiel: $x(3+2x)$ lautet in der Grundform $2x^2+3x$.
  Ein Polynom n-ten Grades hat in der Grundform höchstens $n+1$ Summanden.

1.1.5 Ordnungsrelation

Symbol	Sprechweise, Bemerkung	Beispiele
$\mathbf{a < b}$	«a ist kleiner als b» »a kleiner b» Anstatt $a < b$ schreibt man auch $b > a$.	$2 < 3$ $-2.1 < -2$
$a > 0$	«a ist positiv»	$\sqrt{2} > 0$
$a < 0$	«a ist negativ» Unterscheide zwischen $-a$ und $a < 0$.	$(-2)^3 < 0$
$\mathbf{a \leq b}$	«a ist kleiner oder gleich b» d.h. $a < b$ <u>oder</u> $a = b$	$2 \leq 5$ $2 \leq 2$
$\mathbf{a < x < b}$	«x grösser a und kleiner b» «x liegt zwischen a und b» d.h. $a < x$ <u>und</u> $x < b$	$3 < \pi < 4$ $\|x\| < 2 \Rightarrow -2 < x < 2$

1.2 Addition, Subtraktion

1.3 Multiplikation, Distributivgesetz, binomische und trinomische Formeln

Distributivgesetz:

$a(b + c) = ab + ac$

$a(b - c) = ab - ac$

Unterscheide:

$a(bc) = abc$

Binomische Formeln:

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ $\qquad (a - b)^2 = (b - a)^2$

$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

Trinomische Formel:

$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$

1.3.1 Faktorzerlegung

Wir unterscheiden vier Methoden:

1) **Ausklammern eines gemeinsamen Faktors** (Aufgaben 28 bis 30)

Beispiel: $6a^3b^2 - 3a^2b^3 + 9a^2b$

$= 3a^2b(2ab - b^2 + 3)$

2) **Mehrmaliges Ausklammern** (Aufgaben 31, 32)

Beispiel: $u^2 - uv - uw - 3u + 3v + 3w$

$= u(u - v - w) - 3(u - v - w)$

$= (u - v - w)(u - 3)$

3) **Binom $a^2 - b^2$** (Aufgaben 33, 34)

Beispiel: $(x^2 + 2)^2 - (x - 2)^2$

$= [(x^2 + 2) - (x - 2)]\,[(x^2 + 2) + (x - 2)]$

$= [x^2 - x + 4]\,[x^2 + x]$

$= (x^2 - x + 4)(x + 1)x$

4) **Polynom 2. Grades $ax^2 + bx + c$** (Aufgaben 35 bis 39)

Beispiel: $x^2 + 3x - 28 = (x + 7)(x - 4)$

1.4 *Division*

1.4.1 Erweitern und kürzen

$$\frac{-a}{b} = \frac{a}{-b} = -\frac{a}{b} \qquad \frac{a-b}{b-a} = -1$$

1.4.2 Addieren und subtrahieren

$$\frac{p^2-8p}{2p^2+p-15} - \frac{p^2}{5p-2p^2}$$

1) Einzelbrüche kürzen

$$= \frac{p^2-8p}{2p^2+p-15} - \frac{p^2}{p(5-2p)} = \frac{p^2-8p}{2p^2+p-15} - \frac{p}{5-2p}$$

2) Hauptnenner bestimmen (Einzelnenner in Faktoren zerlegen)

$$= \frac{p^2-8p}{(2p-5)(p+3)} - \frac{-p}{2p-5} \qquad [\text{Hauptnenner} = (2p-5)(p+3)]$$

3) Einzelbrüche erweitern und addieren resp. subtrahieren

$$= \frac{p^2-8p-(-p)(p+3)}{(2p-5)(p+3)} = \frac{p^2-8p+p^2+3p}{(2p-5)(p+3)} = \frac{2p^2-5p}{(2p-5)(p+3)}$$

4) Ergebnis wenn möglich kürzen

$$= \frac{p(2p-5)}{(2p-5)(p+3)} = \frac{p}{p+3}$$

1.4.3 Multiplizieren

$$\left(1+\frac{1}{a}\right)^2\left(1+\frac{a^2}{a^2+a}\right)\left(2-\frac{2a^2+2a-1}{a^2+a}\right)$$

1) Einzelbrüche kürzen

$$= \left(1+\frac{1}{a}\right)^2\left(1+\frac{a}{a+1}\right)\left(2-\frac{2a^2+2a-1}{a(a+1)}\right)$$

2) Jeden Faktor als Bruch schreiben

$$= \left(\frac{a+1}{a}\right)^2\left(\frac{a+1+a}{a+1}\right)\left(\frac{2a^2+2a-2a^2-2a+1}{a(a+1)}\right) = \frac{(a+1)^2}{a^2}\cdot\frac{2a+1}{a+1}\cdot\frac{1}{a(a+1)}$$

3) Rechenregel anwenden

$$= \frac{(a+1)^2(2a+1)}{a^2(a+1)\,a(a+1)}$$

4) Kürzen

$$= \frac{2a+1}{a^3}$$

1.4.4 Dividieren

Doppel- und Mehrfachbrüche werden mit der sogenannten **Erweiterungsmethode** vereinfacht.

Beispiel:
$$\frac{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}}{\frac{3}{8}-\frac{5}{6}} = \frac{\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)\cdot 24}{\left(\frac{3}{8}-\frac{5}{6}\right)\cdot 24} = \frac{8+6}{9-20} = -\frac{14}{11}$$

$\text{kgV}\,(3;\,4;\,8;\,6) = 24$

Der Erweiterungsterm ist das kgV aller Teilnenner.

1.5 Potenzen

1.5.1 Definition von a^n

Für $a \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$a^1 = a\ ; \qquad a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots\ldots\ldots \cdot a}_{\text{n Faktoren}} \qquad (n \geq 2)$$

Der Term a^n heisst **Potenz;** a heisst **Basis,** n heisst **Exponent.**

Für $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, $b \neq 0$ und $m \in \mathbb{Z}$ gilt:

$$a^0 = 1 \qquad a^{-m} = \frac{1}{a^m} \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^{-m} = \left(\frac{b}{a}\right)^m$$

Beachte: $(-a)^n \neq -a^n$, *Beispiel:* $(-2)^4 \neq -2^4$

$ka^n \neq (ka)^n$, *Beispiel:* $2a^3 \neq (2a)^3$

1.5.2 Addieren und subtrahieren von Potenzen

$$ax^m + bx^m - cx^m = (a + b - c)x^m$$

Beispiel für Potenzen mit verschiedenen Exponenten:

$$7 \cdot 2^{n+1} - 3 \cdot 2^n + 8 \cdot 2^{n-1} = 7 \cdot (2 \cdot 2^n) - 3 \cdot 2^n + 8 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 2^n\right) = 14 \cdot 2^n - 3 \cdot 2^n + 4 \cdot 2^n = 15 \cdot 2^n$$

1.5.3 Anwendung der Potenzsätze

Potenzsätze für $a, b \in \mathbb{R}$ und $m, n \in \mathbb{Z}$

(1) Gleiche Basis: $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ $(a \neq 0)$

(2) Gleicher Exponent: $a^n \cdot b^n = (ab)^n$

$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$ $(b \neq 0)$

(3) Potenzieren einer Potenz: $(a^m)^n = (a^n)^m = a^{mn}$

1.5.4 Zehnerpotenzen

Zehnerpotenz: Eine Potenz mit der Basis 10, z.B. 10^3 ; 10^0 ; 10^{-7}

Exponentenschreibweise oder **wissenschaftliche Form** einer Zahl:

$$\mathbf{a \cdot 10^k} \quad ; \quad 1 \le a < 10$$

Produkt einer Zahl a zwischen 1 und 10 und einer Zehnerpotenz 10^k ($k \in \mathbb{Z}$)

Beispiele: $2340 = 2.34 \cdot 10^3$, $0.087 = 8.7 \cdot 10^{-2}$

SI-Vorsätze:

Vorsatz	Kurzzeichen	Bedeutung (Faktor)
Tera	T	10^{12}
Giga	G	10^9
Mega	M	10^6
Kilo	k	10^3
Hekto	h	10^2
Deka	da	10^1
Dezi	d	10^{-1}
Zenti	c	10^{-2}
Milli	m	10^{-3}
Mikro	µ	10^{-6}
Nano	n	10^{-9}
Piko	p	10^{-12}

1.6 Wurzeln

1.6.1 Die Quadratwurzel

Unter $\sqrt{\mathbf{a}}$ ($a \ge 0$) verstehen wir jene nicht negative Zahl, deren Quadrat a ergibt.:

$$\sqrt{a}\sqrt{a} = (\sqrt{a})^2 = a \qquad a \ge 0$$

Beachte:

(1) $\sqrt{a}$ ist für $a < 0$ nicht definiert (dies gilt für die Zahlenmenge $\mathbb{R}$).

(2) $\sqrt{a}$ ist nie negativ, z.B. $\sqrt{4} \neq -2$

(3) $\sqrt{a^2} = a$ für $a \ge 0$

$\sqrt{a^2} = |a|$ für $a \in \mathbb{R}$

Rechengesetze:

$$\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab} \qquad \text{für } a \ge 0,\ b \ge 0$$

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}} \qquad \text{für } a \ge 0,\ b > 0$$

Beispiele: $\frac{1}{3}\sqrt{5}$; $\sqrt{2}-\frac{2}{3}\sqrt{6}$; $3\sqrt{3}-\sqrt{10}+\frac{1}{8}\sqrt{15}$

Gegenbeispiele: $\frac{1}{\sqrt{3}}$; $\sqrt{0.4}$; $2\sqrt{2}-5\sqrt{2}$; $3\sqrt{12}+\sqrt{20}$; $\sqrt{3}\left(1+\sqrt{2}\right)$

Unter der **Normalform eines Wurzelterms** (ohne Variablen) verstehen wir die Darstellung

$$a_0 + a_1\sqrt{n_1} + a_2\sqrt{n_2} + \ldots.$$

wobei $a_0, a_1, a_2, \ldots. \in \mathbb{Q}$ und $n_1, n_2, \ldots. \in \mathbb{N}$

Alle Radikanden n_i sind quadratfrei und voneinander verschieden.

1.6.2 Definition von $\sqrt[n]{a}$ und der Potenzdarstellung von $\sqrt[n]{a^m}$

Unter $\sqrt[n]{a}$ verstehen wir jene nicht negative Zahl, deren n-te Potenz den Wert a ergibt:

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a \qquad \text{für } a \geq 0\,, \qquad n = 2, 3, 4, \ldots$$

$$\sqrt[\text{Wurzelexponent}]{\text{Radikand}}$$

Spezialfälle: $\sqrt[n]{0} = 0$, $\sqrt[n]{1} = 1$

Beachte:

(1) $\sqrt[n]{a}$ ist für $a < 0$ nicht definiert. [1]
z.B. $\sqrt[3]{-8} \neq -2$

(2) $\sqrt[n]{a}$ ist nie negativ
z.B. $\sqrt[4]{16} \neq -2$ obwohl $(-2)^4 = 16$

(3) $\sqrt[n]{\ldots}$ ist nur für natürliche Zahlen n definiert, die grösser als 1 sind.
z.B. $\sqrt[-3]{5}$ und $\sqrt[0.2]{4}$ sind nicht definiert.
Der Wurzelexponent 2 wird weggelassen.

(4) $\sqrt[n]{a^n} = a$ für $a \geq 0$
$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = \sqrt[n]{a^n}$ für $a \geq 0$

---

1 Gelegentlich wird $\sqrt[n]{a}$ auch für ungerades n und $a < 0$ definiert:
$\sqrt[n]{a} = -\sqrt[n]{|a|}$, z.B. $\sqrt[3]{-27} = -\sqrt[3]{27} = -3$
Dabei ist jedoch zu beachten, dass viele Rechengesetze beim Umformen solcher Terme nicht gelten.

Die Potenzdarstellung eines Wurzelterms
für $a \geq 0$, $n, z, \in \mathbb{N}$ und $n \neq 1$ gilt:

$$\boxed{a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a} \quad ; \quad a^{\frac{z}{n}} = \sqrt[n]{a^z}}$$

$$a^{-\frac{z}{n}} = \sqrt[n]{a^{-z}} = \sqrt[n]{\frac{1}{a^z}} \qquad a^{-\frac{z}{n}} = \frac{1}{a^{\frac{z}{n}}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^z}} = \sqrt[n]{\frac{1}{a^z}}$$

1.6.3 Das Rechnen mit Wurzeln

Die fünf Potenzsätze von «1.5.3 Anwendung der Potenzsätze» sind auch für rationale Zahlen als Exponenten gültig.

Potenzsätze: für $a, b \in \mathbb{R}$ und $m, n \in \mathbb{Q}$

(1) Gleiche Basis: $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ $(a \neq 0)$

(2) Gleicher Exponent: $a^n \cdot b^n = (ab)^n$

$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$ $(b \neq 0)$

(3) Potenzieren einer Potenz: $(a^m)^n = (a^n)^m = a^{mn}$

Wurzelgesetze:

für $a > 0$, $b > 0$; $m, n \in \mathbb{N}$, $m \neq 1$ und $n \neq 1$

(1) $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$

(2) $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$

(3) $\left(\sqrt[n]{a}\right)^k = \sqrt[n]{a^k}$ $(k \in \mathbb{Z})$

(4) $\sqrt[nk]{a^{mk}} = \sqrt[n]{a^m}$ $(k \in \mathbb{N})$

(5) $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$

1.7 Logarithmen

1.7.1 Zehnerlogarithmen (dekadische Logarithmen)

Unter **lg a** (oder: $\log_{10} a$) versteht man jene Zahl (Exponent), mit der man 10 potenzieren muss, um a zu erhalten:

$$\mathbf{10^{\lg a} = a} \qquad \textbf{für } \mathbf{a > 0}$$

oder: $$\mathbf{10^x = a \Leftrightarrow x = \lg a} \qquad \textbf{für } \mathbf{a > 0}$$

lg a: «Zehnerlogarithmus von a», oder «Logarithmus von a zur Basis 10»

Sonderfälle: $\lg 1 = 0$; $\lg(10^k) = k$ $(k \in \mathbb{R})$

Beachte:

(1) lg a ist für $a \leq 0$ nicht definiert.

(2) Auf dem Rechner ist der Zehnerlogarithmus mit LOG bezeichnet.

1.7.2 Logarithmen mit beliebiger Basis

Unter $\log_b c$ versteht man jene Zahl (Exponent), mit der man b potenzieren muss, um c zu erhalten:

$$b^{\log_b c} = c \qquad \text{für } b > 0\,;\, b \neq 1\,;\, c > 0$$

oder: $b^x = c \quad \Leftrightarrow \quad x = \log_b c$

$\log_b c$: «Logarithmus von c zu Basis b»

Sonderfälle: $\log_b b = 1$; $\log_b 1 = 0$; $\log_b (b^k) = k \quad (k \in \mathbb{R})$

Häufig benutzte Basen:	Basis 10:	$\log_{10} c = \lg c$	(Zehnerlogarithmus)
	Basis e = 2.718..	$\log_e c = \ln c$	(natürlicher Logarithmus)
	Basis 2:	$\log_2 c = \text{lb } c$	(Zweierlogarithmus)

Alle Logarithmen mit gleicher Basis bilden ein Logarithmensystem.
Als Basis können alle Elemente aus $IR^+ \succ \{1\}$ benutzt werden.

Die Logarithmen mit der Basis 2 (binär) kürzt man mit *lb* ab.

$\log_2 n = lb\ n$

binäre Logarithmen

In den Naturwissenschaften wird vielfach als Basis e = 2.17828..... verwendet. Die Abkürzung dafür ist *ln* . Logarithmen mit dieser Basis heissen natürliche Logarithmen.

$\log_e b = \ln\ b$

natürliche Logarithmen

Um das Rechnen einfach zu gestalten, wählte der englische Mathematiker Henry Briggs (1561-1630) die Zahl 10 als Basis. Man nennt diese Logarithmen Briggsche, dekadische oder Zehnerlogarithmen. (*lg*)

$\log_{10} b = \lg\ b$

Zehnerlogarithmen

1.7.3 Logarithmengesetze

Die folgenden Gesetze gelten für eine beliebige Basis b ($b > 0$, $b \neq 1$), deshalb schreiben wir anstatt $\log_b x$ einfach $\log x$.

(1) $\log(x \cdot y) = \log x + \log y$

(2) $\log\left(\frac{x}{y}\right) = \log x - \log y$ $\qquad x > 0,\ y > 0,\ m \in \mathbb{R}$

(3) $\log(x^m) = m \cdot \log x$

2 Gleichungen und Ungleichungen

Gleichungen

Verbindet man zwei Terme T_1 und T_2 durch das Gleichheitszeichen, so nennt man $T_1 = T_2$ eine Gleichung.

Eine Gleichung ist entweder eine Aussage oder eine Aussageform.

Beispiele: $2 + 3 = 5$ $\qquad 3^2 = 2^3$ $\qquad x = \frac{1}{x}$

$a + a = 2a$ $\qquad a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ $\qquad (m + n)^2 = m^2 + n^2$

$y + 1 = y$ $\qquad \sqrt{t} = t^2 - 1$ $\qquad |z - 1| = z + 1$

Gegenbeispiele: $\frac{x}{0} = 2$ $\qquad a < 5$ $\qquad 0 \leq x < 1$ $\qquad b \neq 5$

Allgemeines über Bestimmungsgleichungen

Bestimmungsgleichung:
Gleichung, die genau einen Platzhalter hat. (Bestimmungsgleichungen werden im Folgenden abgekürzt «Gleichungen» genannt.)

Beispiele: $x = \frac{1}{x}$ $\qquad a + a = 2a$ $\qquad y + 1 = y$ $\qquad \sqrt{t} = t^2 - 1$

Gegenbeispiele: $2 + 3 = 5$ $\qquad (m + n)^2 = m^2 + n^2$

Unbekannte: Platzhalter einer Gleichung. (Wird auch Lösungsvariable genannt.)

Grundmenge einer Gleichung:
Menge aller Zahlen, die für die Unbekannte zugelassen sind. Symbol: G
Im Folgenden ist immer $\mathbb{R}$ die Grundmenge, falls nicht etwas anderes vorgeschrieben ist.

Bei Textaufgaben hängt G von der Bedeutung der Unbekannten ab.
z.B.: Bedeutet die Unbekannte eine Anzahl Objekte, so gilt: $G = \mathbb{N}_0$

Definitionsbereich einer Gleichung $T_1 = T_2$:

Menge aller Zahlen aus der Grundmenge G, für welche die Terme T_1 und T_2 definiert sind. Symbol: D

Es gilt: $D = D_1 \cap D_2$, D_1 ist Definitionsbereich von T_1, D_2 jener von T_2.

Der Definitionsbereich ist eine Teilmenge der Grundmenge: $D \subset G$ oder $D = G$

Beispiele: $\frac{1}{x} = \frac{x}{x+2}$ $D = \mathbb{R} \setminus \{0; -2\}$

$\sqrt{x} + 2x = \sqrt{x+5}$ $D = \mathbb{R}_0^+$

Lösung:
Eine Zahl (bzw. ein Term) aus dem Definitionsbereich, welche die Gleichung erfüllt, d.h. wenn nach dem Einsetzen in die Gleichung eine wahre Aussage entsteht.

Lösungsmenge:
Menge aller Lösungen einer Gleichung. Symbol: L

Beispiele: $a + 1 = a \Rightarrow L = \{\ \}$ $x(x-2) = 0 \Rightarrow L = \{0; 2\}$

$x + x = 2x \Rightarrow L = \mathbb{R}$

Probe:
Einsetzen einer (berechneten) Zahl (bzw. eines Terms) in die ursprüngliche Gleichung und Bestimmung des Wahrheitswertes der entstandenen Aussage.

Parameter:
Enthält eine Gleichung neben der Unbekannten auch noch andere Platzhalter, so nennt man diese Parameter.

Im Folgenden wird bei Gleichungen mit Parametern die Unbekannte stets mit x bezeichnet.

Beispiel: $ax - b^2 = bx + 2$ x: Unbekannte a, b: Parameter

Umformen einer Gleichung

Äquivalente Gleichungen:
Zwei Gleichungen, die bezüglich einer Grundmenge G die gleiche Lösungsmenge besitzen. Symbol: $\Leftrightarrow$

Beispiel: $2x = x + 5 \quad \Leftrightarrow \quad x = 5$

Gegenbeispiel: $x^2 = 4 \quad \not\Leftrightarrow \quad x = 2$

Äquivalenzumformungen:
Gleichungsumformungen, welche die Lösungsmenge nicht verändern.

(1) Termumformungen (falls der Definitionsbereich des Terms sich nicht ändert).

Beispiel: $5x + 2x - 5 = x(x - 3) \quad \Leftrightarrow \quad 7x - 5 = x^2 - 3x$

(2) Addieren oder subtrahieren einer Zahl a $(a \in \mathbb{R})$.

Beispiel: $2x^2 - 6 = 3 \quad \Leftrightarrow \quad 2x^2 = 9$

(3) Multiplizieren mit einer Zahl a $(a \in \mathbb{R}, a \neq 0)$.

Beispiel: $\frac{x}{2} = 3 \quad \Leftrightarrow \quad x = 6$

(4) Dividieren durch eine Zahl a $(a \in \mathbb{R}, a \neq 0)$.

Beispiel: $3x^2 = 12 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = 4$

(5) Addieren oder subtrahieren eines Terms T(x) – x ist die Unbekannte –, dessen Definitionsbereich nicht kleiner ist als jener der gegebenen Gleichung.

Beispiele: $6x^2 = 2x^2 + 5 \quad \Leftrightarrow \quad 4x^2 = 5$

$\sqrt{x} - \sqrt{x + 2} = 7 \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{x} = 7 + \sqrt{x + 2}$

Gegenbeispiel: $x = -2 \quad \not\Leftrightarrow \quad x + \sqrt{x} = -2 + \sqrt{x}$

Diese Umformungen führen in jedem Fall zu äquivalenten Gleichungen.
Daraus folgt aber nicht, dass bei allen übrigen Umformungen (z.B. Quadrieren, Wurzel ziehen) stets nichtäquivalente Gleichungen entstehen.

2.1 Aussagen und Aussageformen

2.1.1 Aussage

Eine **Aussage** ist ein mit Worten und Zeichen formulierter «Satz», bei dem es sinnvoll ist zu fragen, ob er wahr oder falsch ist.
Man kann also einer Aussage die **Wahrheitswerte** wahr (w) oder falsch (f) zuordnen.

Beispiele:

	Aussage?	Wahrheitswert
Der Rhein ist ein europäischer Fluss.	ja	wahr
Quadratzahlen sind nie ungerade.	ja	falsch
45 – 23 = 21	ja	falsch
Die Menge M ist eine unendliche Menge.	nein	–
Welche Primzahl ist grösser als 5?	nein	–
Die englische Monarchie wird bald abgeschafft.	ja	?
Bring mir jenes Buch!	nein	–

2.1.2 Verknüpfung von Aussagen

Die Verknüpfung «und»

Zwei Aussagen A, B können durch das Wort «und» miteinander verknüpft werden, dadurch entsteht eine neue Aussage «A und B».

Beispiel: A : 12 ist durch 3 teilbar. B : 12 ist durch 4 teilbar.

A und B: 12 ist durch 3 und durch 4 teilbar.

Der Wahrheitswert der Aussage «A und B» hängt natürlich vom Wahrheitswert der Einzelaussagen A bzw. B ab; nicht aber vom Inhalt der beiden Aussagen A bzw. B. Diese Abhängigkeit wird durch eine sogenannte **Wahrheitstafel** definiert:

A	B	$A \wedge B$
w	w	w
w	f	f
f	w	f
f	f	f

Die Verknüpfung durch «und» heisst **Konjunktion.**
Für «und» verwendet man das Zeichen $\wedge$.
Eine Konjunktion ist also nur dann wahr, wenn beide Einzelaussagen wahr sind.

Die Verknüpfung «oder»

Es sind zwei Fälle zu unterscheiden:

Fall 1: Peter wird am Montag oder am Dienstag abreisen.
Die Aussage enthält zwei Möglichkeiten. In diesem Sinne verwendetes «oder» heisst **«ausschliessendes oder».**
In diesem Fall ist die folgende Formulierung eindeutiger:
«Peter reist entweder am Montag oder am Dienstag ab».

Fall 2: Die Zahl 12 ist durch 3 oder durch 4 teilbar.
Diese Aussage enthält drei Möglichkeiten.
In diesem Sinne verwendetes «oder» heisst **«einschliessendes oder».**

In der Mathematik wird «oder» immer im einschliessenden Sinn verwendet.

A	B	$A \vee B$
w	w	w
w	f	w
f	w	w
f	f	f

Die Verknüpfung durch «oder» heisst **Disjunktion.**
Für «oder» verwendet man das Zeichen $\vee$.
Eine Disjunktion ist immer dann wahr, wenn mindestens eine der Einzelaussagen wahr ist.

2.1.3 Aussageformen

Eine **Aussageform** ist ein «Satz», der mindestens eine Leerstelle (man sagt auch Platzhalter oder Variable) enthält, und der in eine Aussage übergeht, wenn für alle Leerstellen Elemente einer Grundmenge eingesetzt werden.

Beispiele:

Aussageform	Grundmenge	Beispiel einer Aussage	Wahrheitswert
$5x = 35$	$\mathbb{R}$	$5 \cdot 7 = 35$	wahr
n ist eine Quadratzahl	$\mathbb{N}$	8 ist eine Quadratzahl	falsch
$8y < 11^2$	$\mathbb{Q}$	$8 \cdot 9.6 < 11^2$	wahr

Beachte:
- Jede Bestimmungsgleichung ist eine Aussageform.
- Aussageformen besitzen keinen Wahrheitswert.

Aussageformen mit genau einem Platzhalter

Grundmenge G Menge aller Elemente, die in einer Aussageform anstelle der Variablen eingesetzt werden können.

Lösungsmenge L Alle Elemente der Grundmenge, die für die Variable eingesetzt, eine wahre Aussage ergeben.

Man unterscheidet:

$L = \{ .. , .. \}$ Die Lösungsmenge ist keine leere Menge und nicht gleich der Grundmenge, d.h. die Aussageform ist bezüglich der Grundmenge G **erfüllbar.**
Beispiel: $(x + 3)(x - 4) = 0$ $G = \mathbb{R}$

$L = G$ Die Lösungsmenge enthält alle Elemente der Grundmenge, d.h. die Aussageform ist bezüglich der Grundmenge **allgemeingültig.**
Beispiel: $x(x + 2) = x^2 + 2x$ $G = \mathbb{R}$

$L = \{ \}$ Die Lösungsmenge ist eine leere Menge, d.h. die Aussageform ist bezüglich der Grundmenge **nicht erfüllbar.**
Beispiel: $3x + 4 = 3x$ $G = \mathbb{R}$

Verknüpfung von Aussageformen

$A \wedge B$ Die Lösungsmenge ist die **Schnittmenge** der Lösungsmengen der beiden Aussageformen A und B. $L(A \wedge B) = L(A) \cap L(B)$

$A \vee B$ Die Lösungsmenge ist die **Vereinigungsmenge** der Lösungsmengen der beiden Aussageformen A und B. $L(A \vee B) = L(A) \cup L(B)$

2.1.4 Äquivalenz von Aussageformen

Zwei Aussageformen heissen **äquivalent** in der Grundmenge G, wenn sie in G die gleiche Lösungsmenge haben.

Zeichen: $A \Leftrightarrow B$ («A ist äquivalent zu B»)

Beispiele: $G = \mathbb{N}$, n ist eine Primzahl $\Leftrightarrow$ n hat genau zwei Teiler

$G = \mathbb{R}$, $x + 2x = 5 \Leftrightarrow 3x = 5$

Äquivalenzumformungen

(1) Termumformungen
(falls der Definitionsbereich des Terms sich nicht ändert)

Beispiel: $5x - 2x + 6 = 4(x - 3) \quad \Leftrightarrow \quad 3x + 6 = 4x - 12$

(2) Addieren oder subtrahieren einer Zahl a $(a \in \mathbb{R})$

Beispiel: $2x + 6 = 3 \quad \Leftrightarrow \quad 2x = -3$

(3) Multiplizieren mit einer Zahl a $(a \in \mathbb{R}, a \neq 0)$

Beispiel: $\frac{x}{2} = 3 \quad \Leftrightarrow \quad x = 6$

(4) Dividieren durch eine Zahl a $(a \in \mathbb{R}, a \neq 0)$

Beispiel: $3x = 12 \quad \Leftrightarrow \quad x = 4$

(5) Addieren oder subtrahieren eines Terms von der Form ax^n
(x ist die Unbekannte)

Beispiele: $8x = 5x - 1 \quad \Leftrightarrow \quad 3x = -1$

$6x^2 = 2x^2 + 5 \quad \Leftrightarrow \quad 4x^2 = 5$

Diese Umformungen führen in jedem Fall zu äquivalenten Gleichungen.
Daraus folgt aber nicht, dass bei allen übrigen Umformungen (z.B. Quadrieren, Wurzel ziehen) stets nichtäquivalente Gleichungen entstehen.

2.2 Lineare Gleichungen

Eine Bestimmungsgleichung heisst **linear** (oder Gleichung ersten Grades), wenn sie zur folgenden Gleichung äquivalent ist:

$$\mathbf{ax + b = 0} \qquad a, b \in \mathbb{R}$$

Beispiele:	$3x = 7$	$\sqrt{3}x = \pi$	$0.7 = 2.5x$
	$0 = 0.79x - 5$	$12 : 6.2 = 5x$	$x^2 = x(x + 1) - 5$

$ax + b = 0$ nennen wir **Grundform** einer linearen Gleichung.

2.3 *Quadratische Gleichungen*

2.3.1 Definition

Eine Bestimmungsgleichung heisst **quadratisch** (oder Gleichung zweiten Grades), wenn sie zur folgenden Gleichung äquivalent ist:

$$\mathbf{ax^2 + bx + c = 0} \qquad a, b, c \in \mathbb{R} \quad \text{und} \quad a \neq 0$$

Beispiele: $3.5x^2 = 0$ $\quad 0.78x^2 = 12$ $\quad 3x^2 - 6x = 0$

$4x^2 - \pi x - \sqrt{3} = 0$ $\quad 10x - 2x^2 = 8.5$

$ax^2 + bx + c = 0$ nennen wir **Grundform** einer quadratischen Gleichung.

2.3.2 Äquivalente und nicht äquivalente Umformungen

Äquivalenzumformungen

(1) Termumformungen
(falls der Definitionsbereich des Terms nicht ändert)

Beispiel: $5x + 2x - 5 = x(x-3) \quad \Leftrightarrow \quad 7x - 5 = x^2 - 3x$

(2) Alle vier Grundoperationen mit einer Zahl a, $a \in \mathbb{R}$ und $a \neq 0$.

(3) Addieren oder subtrahieren eines Terms T(x) – x ist die Unbekannte –, dessen Definitionsbereich nicht kleiner ist als jener der gegebenen Gleichung.

Beispiele: $6x^2 = 2x^2 + 5 \quad \Leftrightarrow \quad 4x^2 = 5$

$\sqrt{x} - \sqrt{x+2} = 7 \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{x} = 7 + \sqrt{x+2}$

Diese Umformungen führen in jedem Fall zu äquivalenten Gleichungen.
Daraus folgt aber nicht, dass bei allen übrigen Umformungen (z.B. Quadrieren, Wurzel ziehen) stets nichtäquivalente Gleichungen entstehen.

2.3.3 Lösungsverfahren

2.3.3.1 Sonderfälle

$\mathbf{ax^2 + bx = 0} \quad a, b \neq 0$

$\mathbf{ax^2 + bx = 0}$

$x(ax + b) = 0 \qquad$ (Produkt = Null)

$x = 0 \quad$ oder $\quad ax + b = 0 \quad \Rightarrow \quad L = \{0\,; -\frac{b}{a}\}$

$\mathbf{ax^2 + c = 0} \quad a \neq 0$

$$\mathbf{x^2 = d} \qquad \begin{cases} d > 0 \Rightarrow L = \{\sqrt{d}\,; -\sqrt{d}\} \\ d = 0 \Rightarrow L = \{0\} \\ d < 0 \Rightarrow L = \{\ \} \end{cases}$$

2.3.3.2 Allgemeine Fälle

$ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ Diskriminante $D = b^2 - 4ac$

Fallunterscheidung:

$D > 0 \Leftrightarrow$ 2 Lösungen $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$

$D = 0 \Leftrightarrow$ 1 Lösung $x = \frac{-b}{2a}$

$D < 0 \Leftrightarrow$ keine reelle Lösung

2.3.4 Textaufgaben

2.3.5 Satz von Vieta

Satz von Viëta: Sind x_1, x_2 die Lösungen der quadratischen Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$, so gilt

$$\boxed{x_1 + x_2 = -\frac{b}{a},} \qquad \boxed{x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}}$$

Die quadratische Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$ $(D \geq 0)$ kann man mit Hilfe der Elemente der Lösungsmenge x_1 und x_2 faktorisieren.

$$\boxed{ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2) = 0}$$

Bsp. $3x^2 + 5x + 2 = 0$ $\quad x_1 = -1, \quad x_2 = -\frac{2}{3}$ $\quad 3(x+1)\left(x + \frac{2}{3}\right) = 0 = 3x^2 + 5x + 2$

2.4 Besondere Gleichungstypen

2.4.1 Bruchgleichungen

Unter einer **Bruchgleichung** verstehen wir eine Gleichung, bei der die Unbekannte im Nenner vorkommt.

Beispiel:

$$\frac{7x - x^2}{x^3 + 2x^2 - 3x} + \frac{-2x+5}{x^2 - 3x + 2} = \frac{-9}{3x+9}$$

1) Brüche kürzen:

$$\frac{x(7-x)}{x(x^2+2x-3)} + \frac{-2x+5}{x^2-3x+2} = \frac{-9}{3(x+3)}$$

$$\frac{7-x}{(x+3)(x-1)} + \frac{-2x+5}{(x-2)(x-1)} = \frac{-3}{x+3}$$

2) Gleichung mit dem Hauptnenner multiplizieren:

Hauptnenner: $(x+3)(x-1)(x-2)$

$$\begin{aligned} (7-x)(x-2) + (-2x+5)(x+3) &= -3(x-1)(x-2) \\ 7x - 14 - x^2 + 2x - 2x^2 - 6x + 5x + 15 &= -3x^2 + 9x - 6 \\ x &= 7 \end{aligned}$$

3) Probe: (Nenner gleich Null?) $L = \{7\}$

Beachte: Das Multiplizieren einer Gleichung mit einem Term, der die Unbekannte enthält, kann zu einer nicht äquivalenten Gleichung führen. Es können **Scheinlösungen** entstehen.

Beispiel:

$$\begin{aligned} 1 + \frac{x^2-2}{x-2} &= \frac{2}{x-2} \\ x - 2 + x^2 - 2 &= 2 \\ x^2 + x - 6 &= 0 \\ (x-2)(x+3) &= 0 \quad \Rightarrow \quad x = 2 \ \text{oder} \ x = -3 \end{aligned}$$

Probe: 2 ist keine Lösung, weil die Brüche nicht definiert sind (Nenner = Null).

Also: $L = \{-3\}$

Bei Bruchgleichungen wird immer mit dem Hauptnenner, der die Unbekannte enthält, multipliziert. **Um Scheinlösungen auszuschliessen, muss unbedingt die Probe durchgeführt werden.**

2.4.2 Wurzelgleichungen

Unter einer **Wurzelgleichung** verstehen wir eine Gleichung, bei der die Unbekannte mindestens einmal unter einer Wurzel vorkommt.

Beispiel:

$$\sqrt{2x+4} - 2\sqrt{2x+2} = \frac{8-24x}{\sqrt{32x+32}}$$

1) Bruch kürzen und Gleichung mit deim Hauptnenner multiplizieren:

$$\sqrt{2x+4} - 2\sqrt{2x+2} = \frac{2-6x}{\sqrt{2x+2}}$$

$$\sqrt{2x+2}\cdot\sqrt{2x+4} - 2\left(\sqrt{2x+2}\right)^2 = 2-6x$$

$$\sqrt{(x+1)(x+2)} - (2x+2) = 1-3x$$

2) Wurzelterm isolieren:

$$\sqrt{(x+1)(x+2)} = 3-x$$

3) Gleichung quadrieren:

$$(x+1)(x+2) = (3-x)^2$$

$$x^2+3x+2 = x^2-6x+9$$

$$x = \frac{7}{9}$$

4) Die Probe zeigt, dass $\frac{7}{9}$ eine Lösung ist. $\qquad L = \left\{\frac{7}{9}\right\}$

Beachte: Das Quadrieren (Potenzieren mit geradem Exponenten) beider Seiten einer Gleichung kann zu einer nicht äquivalenten Gleichung führen. Es können **Scheinlösungen** entstehen.

Beispiel:

$$\sqrt{2x} = \sqrt{x-1}$$

$$2x = x-1$$

$$x = -1$$

Probe: -1 ist keine Lösung, weil die Wurzelterme nicht definiert sind ($\sqrt{-2} \notin \mathbb{R}$).

Also: $L = \{\ \}$

Bei Wurzelgleichungen wird meistens potenziert.
Um Scheinlösungen auszuschliessen, muss unbedingt die Probe durchgeführt werden.

Wurzelgleichungen auflösen:

- Definitionsmenge festlegen (Ausdruck unter der Wurzel muss ≥ 0 sein)
- Wurzel isolieren (alleine auf einer Seite)
  (Bei einer Gleichung mit 2 oder 3 Wurzeln, 2 Wurzeln auf die gleiche Seite bringen)
- quadrieren
- Resultat in der Gleichung einsetzen und kontrollieren

Beim Wurzelziehen zusätzliche Lösungen beachten!

2.4.3 Exponentialgleichungen

Unter einer **Exponentialgleichung** verstehen wir eine Gleichung, bei der die Unbekannte mindestens einmal im Exponenten vorkommt.

Beispiele: (1)

$$\begin{aligned}
5^{x+2} - 2 \cdot 5^{x-1} &= 1000 + 9 \cdot 5^x \\
5^{x+2} - 2 \cdot 5^{x-1} - 9 \cdot 5^x &= 1000 \\
5^{x-1}(5^3 - 2 - 9 \cdot 5) &= 1000 \\
5^{x-1} &= \frac{1000}{78} \\
\lg(5^{x-1}) &= \lg\left(\frac{1000}{78}\right) \\
(x-1) \cdot \lg 5 &= \lg 12.821 \\
x &= \frac{\lg 12.821}{\lg\ 5} + 1 \qquad L = \{2.585\}
\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}
e^{2x+1} - 3e^{x+2} &= 12 \qquad e = 2.718\ldots \\
e \cdot e^{2x} - 3e^2e^x &= 12 \\
e^{2x} - 3e \cdot e^x &= \frac{12}{e} \qquad \text{Substitution: } y = e^x \\
y^2 - 3ey - \frac{12}{e} &= 0
\end{aligned}$$

Die Lösungsformel für quadratische Gleichungen liefert:

$$y_1 = 8.664 \qquad y_2 = -0.510$$

Rücksubstitution:

$$\begin{aligned}
e^x &= 8.664 \qquad e^x = -0.510 \\
x \cdot \ln e &= \ln 8.664 \qquad \Rightarrow \text{keine Lösung,} \\
x &= \ln 8.664 \qquad \text{weil } e^x > 0 \text{ für alle } x \in \mathbb{R} \\
x &= 2.159 \\
L &= \{2.159\}
\end{aligned}$$

Beachte: Das Logarithmieren (Basis beliebig) einer Gleichung ist eine Äquivalenzumformung: $a = b \quad \Leftrightarrow \quad \lg a = \lg b,$ falls $a > 0$ und $b > 0$

- Wurzeln als Exponente schreiben
- Wenn in der Gleichung keine Summen mehr vorhanden sind, kann auf beiden Seiten logarithmiert werden.
- Manchmal kommt man vor dem Logarithmieren auch mit einer Substitution weiter.

2.4.4 Logarithmische Gleichungen

Unter einer **logarithmischen Gleichung** verstehen wir eine Gleichung, in der die Unbekannte im Argument eines Logarithmus vorkommt.

Beispiele: (1)

$$\begin{aligned} \lg(20-4x) &= 2 \qquad \text{Exponieren beider Seiten zur Basis 10} \\ 10^{\lg(20-4x)} &= 10^2 \\ 20-4x &= 100 \\ x &= -20 \end{aligned}$$

Die Probe zeigt, dass -20 eine Lösung ist: $L = \{-20\}$

(2)

$$\begin{aligned} 5+3\cdot\ln(x^2) &= 11 \\ \ln(x^2) &= 2 \qquad \text{Exponieren beider Seiten zur Basis e.} \\ e^{\ln(x^2)} &= e^2 \\ x &= e \quad \vee \quad x = -e \end{aligned}$$

Die Probe zeigt, dass e und $-e$ Lösungen sind: $L = \{e; -e\}$

(3)

$$\begin{aligned} \lg(2u) &= 0.5+\lg(u-6) \\ \lg(2u)-\lg(u-6) &= 0.5 \\ \lg\left(\frac{2u}{u-6}\right) &= 0.5 \\ \frac{2u}{u-6} &= 10^{0.5} \\ 2u &= \sqrt{10}\,(u-6) \\ u &= \frac{6\cdot\sqrt{10}}{\sqrt{10}-2} \approx 16.32 \end{aligned}$$

Die Probe zeigt, dass 16.32 eine Lösung ist: $L = \{16.32\}$

Beachte: Bei logarithmischen Gleichungen werden oft die Logarithmengesetze angewendet, dabei kann sich der Definitionsbereich der Gleichung vergrössern. Es können **Scheinlösungen** entstehen.

Beispiel:

$$\begin{aligned} \lg x+\lg(x+3) &= 1 \quad , \quad x>0 \\ \lg(x(x+3)) &= 1 \quad , \quad x>0 \quad \vee \quad x<-3 \\ x(x+3) &= 10 \\ x^2+3x-10 &= 0 \\ (x-2)(x+5) &= 0 \quad \Rightarrow \quad x=2 \quad \vee \quad x=-5 \end{aligned}$$

Probe: -5 ist keine Lösung, weil die Logarithmusterme nicht definiert sind:
$\lg(-5) \notin \mathbb{R}$ Also: $L = \{2\}$

Um Scheinlösungen auszuschliessen, muss bei logarithmischen Gleichungen unbedingt die Probe durchgeführt werden.

Logarithmus auf eine Seite bringen und dann auf beiden Seiten exponieren (zur entsprechenden Basis).

log $\Rightarrow$ 10^{Term}
ln $\Rightarrow$ e^{Term}

Beachte : Das Exponieren einer Gleichung kann zu einer nicht äquivalenten Gleichung führen. Es können Scheinlösungen entstehen. Deshalb am Schluss die Resultate immer einsetzen und prüfen.

2.5 *Gleichungen mit mehreren Unbekannten*

2.5.1 Lineare Gleichungssysteme mit zwei Unbekannten

Eine Gleichung mit den Unbekannten x und y heist **linear,** wenn sie zur folgenden Gleichung äquivalent ist:

$$a\,\mathbf{x} + b\,\mathbf{y} = c \qquad a, b, c \in \mathbb{R} \text{ und } a, b \neq 0$$

$a\,x + b\,y = c$ nennen wir **Grundform** einer linearen Gleichung mit zwei Unbekannten.

3 Funktionen

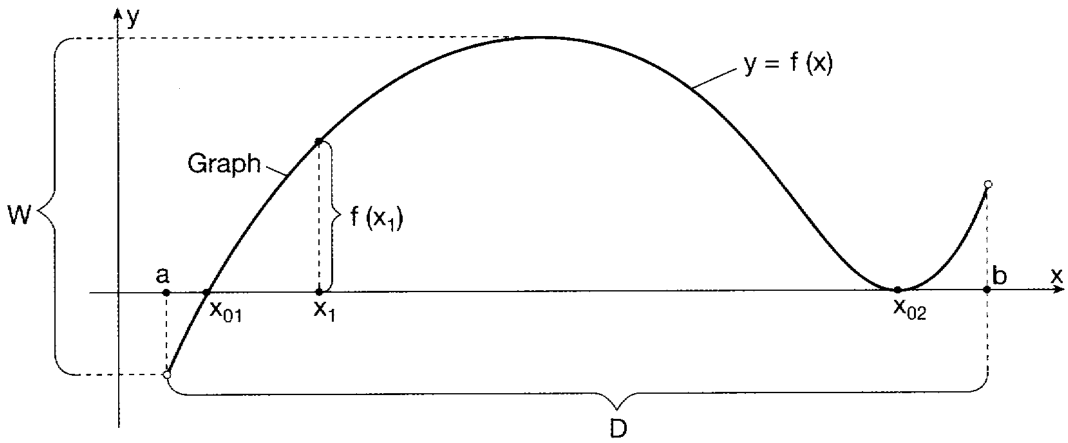
Eine **Funktion** $x \longmapsto y$ ist eine **Zuordnung,** die jeder Zahl x (oder Grösse) einer Menge D *eindeutig* eine Zahl y (oder Grösse) zuordnet.

x heisst **unabhängige Variable.** Ein x-Wert heisst **Argument.**

y heisst **abhängige Variable.** Ein y-Wert heisst **Funktionswert.**

Die Menge D heisst **Definitionsbereich.**

Die Menge W aller Funktionswerte heisst **Wertebereich.**



D:	Definitionsbereich $(a \le x \le b)$;	W:	Wertebereich
x_1:	Argument, d. h. ein Element der Menge D		
$f(x_1)$:	Funktionswert, d. h. ein Element der Menge W		
x_{01} , x_{02}:	**Nullstellen** der Funktion f, d.h. ein Argument x_0, dessen zugeordneter Funktionswert Null ist: $f(x_0) = 0$		

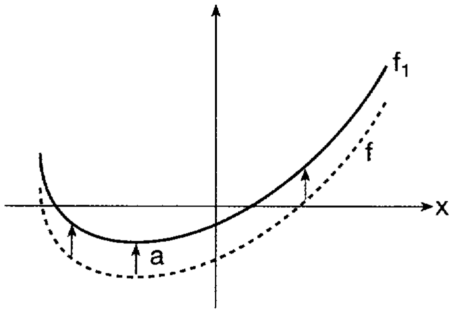
Begriff	Symbol	Beispiel
Funktionsname	$f, g, f_1, \ldots$	$f\colon x \longmapsto x^2 - 3x$
Funktionsterm	$f(x)$	$x^2 - 3x$
Funktionswert	$f(x_1)$	$f(5) = 10$
Funktionsgleichung	$y = f(x)$	$y = x^2 - 3x, \quad f(x) = x^2 - 3x$
Graph k der Funktion f	$k:\ y = f(x)$	Parabel $p:\ y = x^2 - 3x$

Für eine Funktion f verwenden wir folgende Schreibweisen:

$f\colon x \longmapsto y$ $\qquad$ $f\colon x \longmapsto f(x)$ $\qquad$ $y = f(x)$

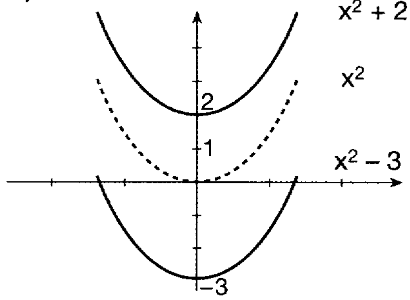
Geometrische Bedeutung einiger Unterschiede im Funktionsterm.

$f_1(x) = f(x) + a$ $(a \in \mathbb{R})$

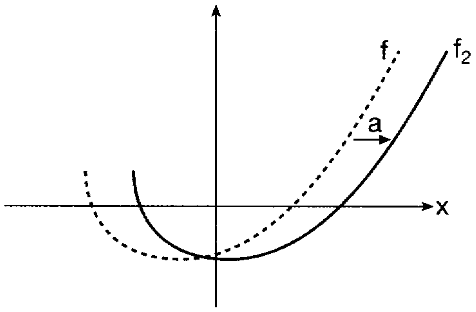


Verschiebung um $|a| \cdot e_y$ in y-Richtung $a > 0$: nach oben
$a < 0$: nach unten

Beispiele:



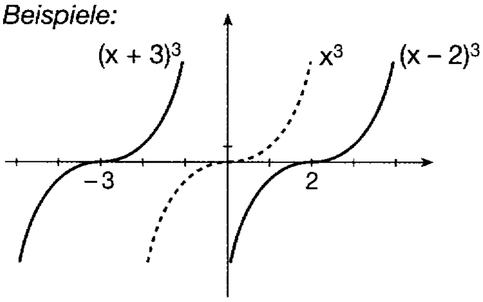
$f_2(x) = f(x - a)$ $(a \in \mathbb{R})$



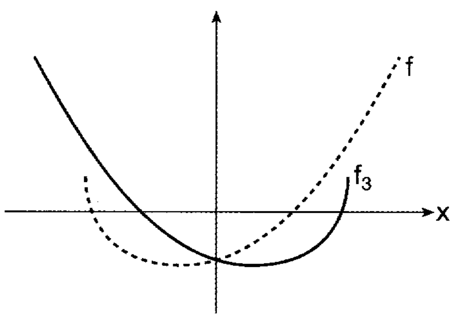
Verschiebung um $|a| \cdot e_x$ in x-Richtung $a > 0$: nach rechts
$a < 0$: nach links

Bemerkung: Probe mit Nullstelle

Beispiele:

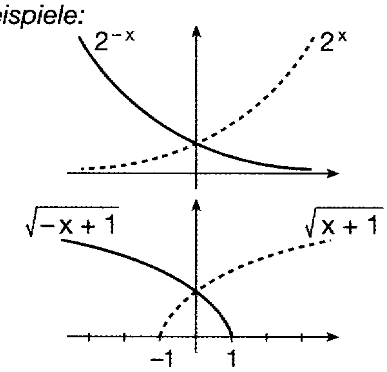


$f_3(x) = f(-x)$

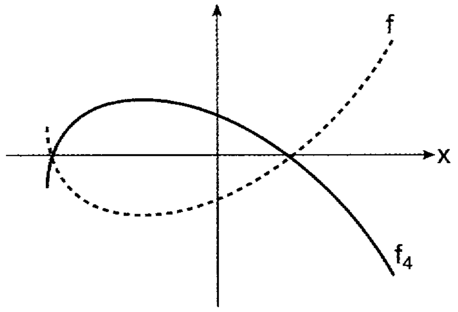


Spiegelung an der y-Achse

Beispiele:

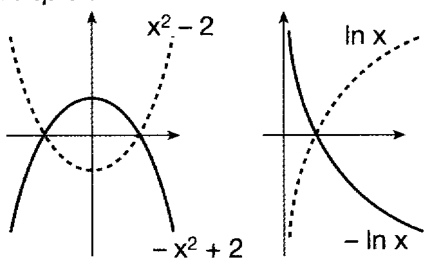


$f_4(x) = -f(x)$

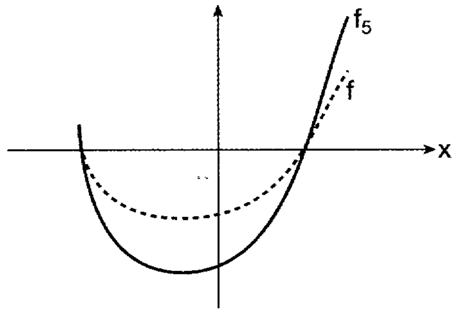


Spiegelung an der x-Achse

Beispiele:



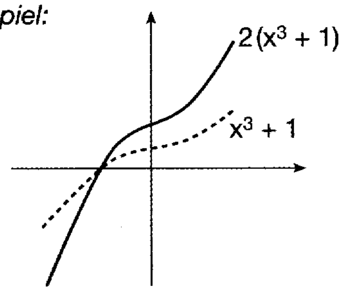
$f_5(x) = a \cdot f(x)$ $(a \in \mathbb{R})$



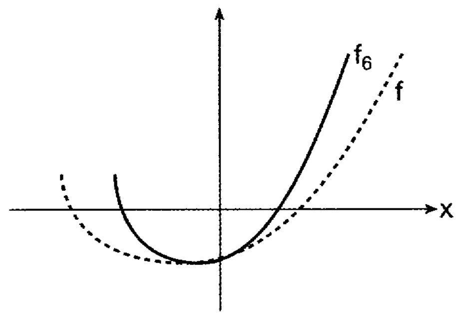
Streckung (Stauchung) von der x-Achse aus mit dem Faktor $|a|$.

Ist $a < 0$, so ist zusätzlich noch eine Spiegelung an der x-Achse notwendig.
Bemerkung:
Die Nullstellen von f und f_5 sind dieselben.

Beispiel:



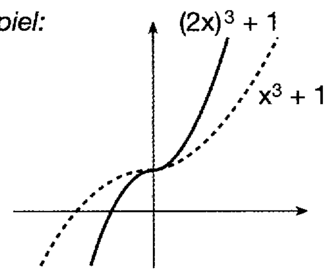
$f_6(x) = f(a \cdot x)$ $(a \in \mathbb{R})$



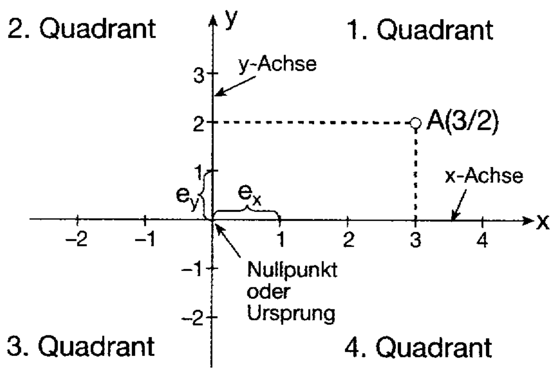
Streckung (Stauchung) von der y-Achse aus mit dem Faktor $\frac{1}{|a|}$.

Ist $a < 0$, so ist zusätzlich noch eine Spiegelung an der y-Achse notwendig.
Bemerkung:
Der y-Achsenschnittpunkt bleibt derselbe.

Beispiel:



3.1 Kartesisches Koordinatensystem



e_x: **Einheitsstrecke** auf der x-Achse
e_y: **Einheitsstrecke** auf der y-Achse

Die Einheitsstrecken e_x und e_y dürfen verschieden gross gewählt werden, wenn nicht etwas anderes vorgeschrieben ist.

In einem Koordinatensystem kann man **geordnete Zahlenpaare** (x/y) als geometrische Punkte darstellen.

A (x_A/y_A)

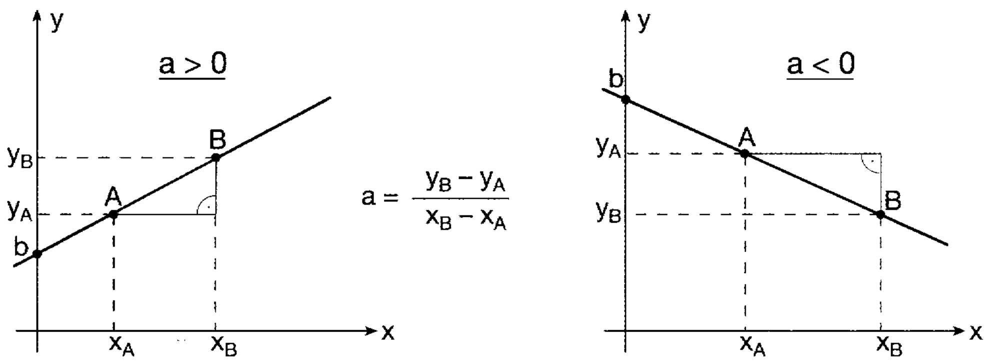
x_A: **x-Koordinate** oder **Abszisse** des Punktes A
y_A: **y-Koordinate** oder **Ordinate** des Punktes A

3.2 Lineare Funktionen

Eine Funktion f mit **f (x) = ax + b** (a, b ∈ ℝ und a ≠ 0) heisst **lineare Funktion** oder Polynomfunktion ersten Grades.

f (x) = ax + b nennen wir **Grundform** einer linearen Funktion.

Der Graph einer linearen Funktion y = ax + b ist eine **Gerade** (Strecke) mit der **Steigung** a und dem **y-Achsenabschnitt** b.

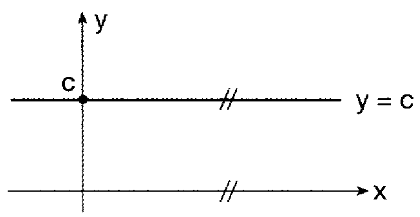


$$a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

Konstante Funktion

Eine Funktion f mit **f (x) = c** (c ∈ ℝ) heisst **konstante Funktion.**

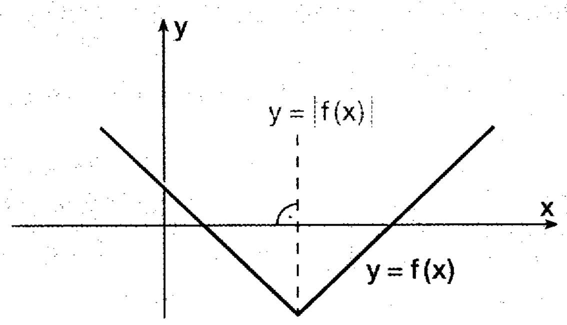
Der Graph einer konstanten Funktion ist eine Parallele zur x-Achse durch den Punkt (0/c).



$y = ax + b$

a: Steigung	x > 1 Steigung x < 1 Senkung
b: Verschiebung in Y-Richtung	+ nach oben - nach unten

3.2.1 Betragsfunktionen



Der Graph von $y = |f(x)|$ besteht aus allen Teilen des Graphen von $y = f(x)$, die oberhalb der x-Achse liegen, und den an der x-Achse gespiegelten Teilen, die unterhalb derselben verlaufen.

3.3 Quadratische Funktionen

Eine Funktion f mit $\mathbf{f(x) = ax^2 + bx + c}$ $(a, b, c \in \mathbb{R}$ und $a \neq 0)$ heisst **quadratische Funktion** oder Polynomfunktion zweiten Grades.

$f(x) = ax^2 + bx + c$ nennen wir **Grundform** und $f(x) = a(x-m)^2 + n$ heisst **Scheitelform** einer quadratischen Funktion.

Der Graph einer quadratischen Funktion ist eine **Parabel,** deren Symmetrieachse parallel zur y-Achse verläuft.

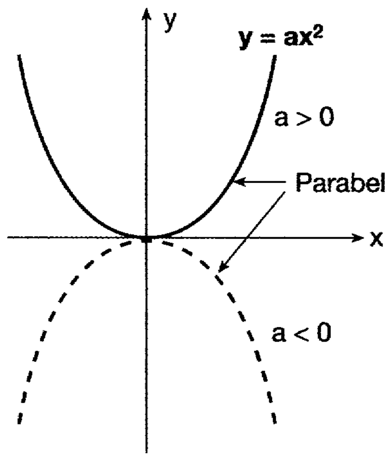
Der Graph von $y = x^2$ heisst **Normalparabel.**

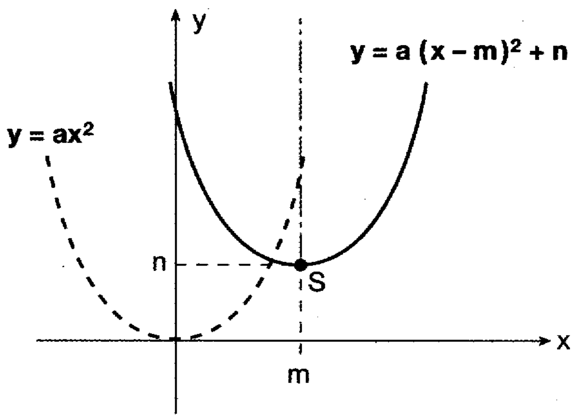
Die Parabel $y = ax^2 + bx + c$ ist zur Parabel $y = ax^2$ kongruent.

$a > 0 \Leftrightarrow$ Parabel ist nach *oben* geöffnet.

$a < 0 \Leftrightarrow$ Parabel ist nach *unten* geöffnet.

$y = a(x-m)^2 + n \Rightarrow$ Scheitel $S(m/n)$



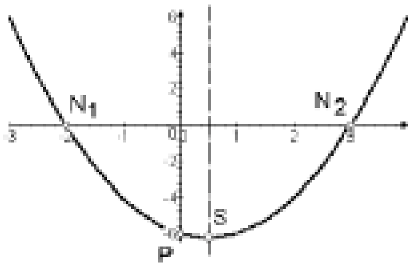


Jede quadratische Funktion hat eine der folgenden Gleichungen:

Grundform:	$y = ax^2 + bx + c$	a, b, c $\in$ R und a $\neq$ 0
Scheitelform:	$y = a(x + m)^2 + n$	a, m, n $\in$ R und a $\neq$ 0
Produktform:	$y = a(x + p)(x + q)$	a, p, q $\in$ R und a $\neq$ 0

- In der Scheitelform ist der Scheitelpunkt ablesbar: S(-m ; n)
- In der Produktform sind die Nullstellen ablesbar: N_1(-p ; 0) und N_2(-q ; 0)
- Die Grundform wird aus der Scheitelform oder der Produktform gewonnen durch
- ausmultiplizieren.
- Die Produktform wird aus der Grundform oder der Scheitelform gewonnen durch
- faktorisieren.
- Die Scheitelform wird aus der Grundform gewonnen mit der Scheitelpunktformel.

Graf



- Der Graf einer quadratischen Funktion ist eine **Parabel**. Ist der Parameter a = 1 so heisst der Graf **Normalparabel**.
- Der **Scheitelpunkt** S ist der tiefste (bzw. höchste) Punkt der Kurve.
- Die Parabel ist **achsensymmetrisch** zu einer Parallelen zur y-Achse durch den Scheitelpunkt.
- Die **Nullstellen** N_1 und N_2 sind die Schnittpunkte der Parabel mit der x-Achse. Die Funktionsgleichung wird für y = 0 aufgelöst. Wegen der Diskriminante (siehe quadratische Gleichungen) gibt es entweder keine, eine oder 2 Nullstellen.
- Ist nur eine Nullstelle vorhanden, so ist diese identisch mit dem Scheitelpunkt.
- Sind 2 Nullstellen vorhanden, so ist die Symmetrieachse die Mittelsenkrechte der beiden Nullstellen.
- Die Parabel schneidet die y-Achse im Punkt P. Dieser hat die Koordinaten P(0 ; c) gemäss Grundform.

$$y = a(x+m)^2 + n$$

a: Öffnung der Parabel	a > 1 Verkleinerung der Öffnung, oben a = 1 Normalparabel oben 0 < a < 1 Vergrösserung der Öffnung, oben a = 0 keine Parabel, lineare Funktion -1 < a < 0 Grössere Öffnung unten a = -1 Normalparabel unten a < -1 Verkleinerung der Öffnung, unten
m: Verschiebung in X-Richtung	m > 0 nach links m < 0 nach rechts
n: Verschiebung in Y-Richtung	n > 0 nach oben n < 0 nach unten

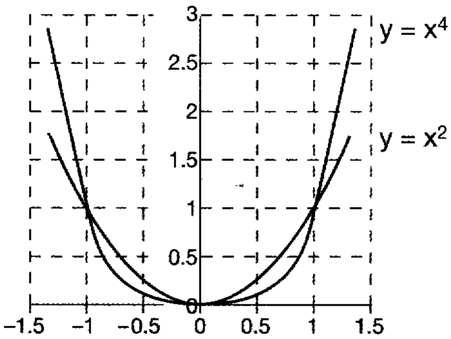
3.4 Potenzfunktionen

Eine Funktion f mit **$f(x) = x^n$** $(n = 2, 3, 4, \ldots)$ [1] heisst **Potenzfunktion.**

Der Graph einer Potenzfunktion $y = x^n$ heisst **Parabel n-ter Ordnung.**

Exponent gerade:

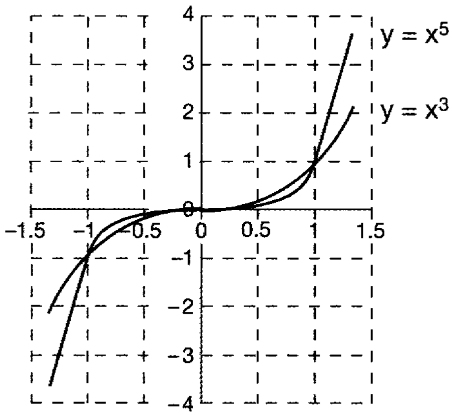
$\boxed{y = x^{2m}}$ $(m = 1, 2, \ldots)$



Die Graphen sind *achsensymmetrisch* zur y-Achse.

Exponent ungerade:

$\boxed{y = x^{2m+1}}$ $(m = 1, 2, \ldots)$



Die Graphen sind *punktsymmetrisch* zum Ursprung (0/0).

3.5 Polynomfunktionen

Eine Funktion f mit $\mathbf{f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0}$
wobei $n \in \mathbb{N}$ und $a_i \in \mathbb{R}$, $a_n \neq 0$
heisst **Polynomfunktion** oder ganzrationale Funktion **n-ten Grades.**

Jede lineare Funktion $f(x) = ax + b$ $(a \neq 0)$ ist eine Polynomfunktion ersten Grades.

Jede quadratische Funktion $f(x) = ax^2 + bx + c$ ist eine Polynomfunktion zweiten Grades.

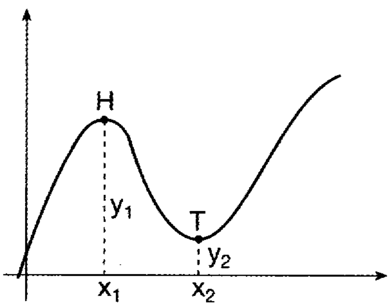
Jede Potenzfunktion $f(x) = ax^n$ $(a \neq 0, n \in \mathbb{N})$ ist eine Polynomfunktion n-ten Grades.

Der Graph einer Polynomfunktion n-ten Grades hesst **Parabel n-ter Ordnung.**

Eine Polynomfunktion verhält sich
(1) für *kleine* $|x|$-Werte $(x \to 0)$ näherungsweise wie die Glieder mit den niedrigsten x-Potenzen.
(2) für *grosse* $|x|$-Werte $(x \to \pm\infty)$ näherungsweise wie das Glied mit der höchsten x-Potenz.

Beispiel: $f(x) = 8x^4 + x^3 - 2x^2 + 6$ Für kleine $|x|$-Werte gilt: $f(x) \approx -2x^2 + 6$,
für grosse $|x|$-Werte: $f(x) \approx 8x^4$

Extremstellen und Extremwerte



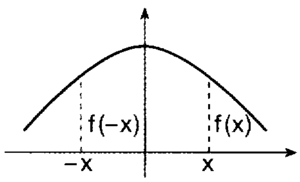
Funktion: x_1, x_2: Extremstellen
y_1: relatives Maximum } Extremwerte
y_2: relatives Minimum }

Graph: H: Hochpunkt } Extrempunkte
T: Tiefpunkt }

Symmetrie

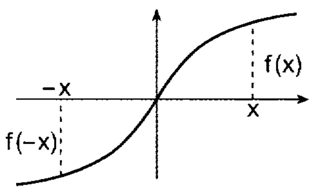
Der Graph einer Funktion f ist *symmetrisch zur y-Achse,* wenn gilt: $\mathbf{f(-x) = f(x)}$ für alle $x \in \mathbb{D}$.

Eine Funktion mit dieser Eigenschaft nennt man eine **gerade Funktion.**



Der Graph einer Funktion f ist *symmetrisch zum Nullpunkt,* wenn gilt: $\mathbf{f(-x) = -f(x)}$ für alle $x \in \mathbb{D}$.

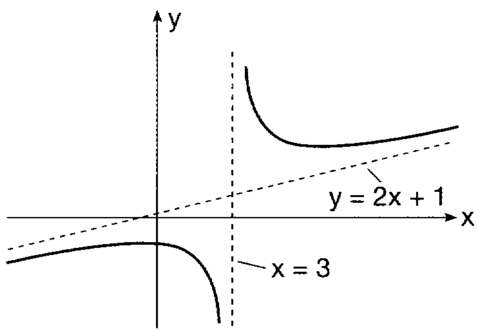
Eine Funktion mit dieser Eigenschaft heisst **ungerade Funktion.**



3.6 Rationale Funktionen

Eine Funktion f mit $\mathbf{f(x) = \frac{Z(x)}{N(x)}}$ heisst (gebrochen) **rationale Funktion,** wenn $Z(x)$ und $N(x)$ Polynome sind und der Grad des Nennerpolynoms $N(x)$ mindestens 1 ist.

Beispiele: $y = \frac{1}{x}$, $y = \frac{2x}{x+5}$, $y = \frac{x-2}{(x+4)^3}$, $y = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1}$



$$f(x) = \frac{2x^2 - 5x + 20}{x-3} = 2x + 1 + \frac{23}{x-3}$$

Die Funktion f hat eine Polstelle: $x_P = 3$.

Die Geraden $x = 3$ (Parallele zur y-Achse) und $y = 2x + 1$ sind Asymptoten des Graphen.

Polstelle: Ein Argument $x = a$ heisst Polstelle (oder Pol) der rationalen Funktion $f(x) = \frac{Z(x)}{N(x)}$ wenn $N(a) = 0$ und $Z(a) \neq 0$ ist.

Asymptote: Nähert sich eine Kurve immer mehr einer *Geraden,* ohne sie zu schneiden oder zu berühren, so heisst diese Gerade Asymptote.

Für grosse $|x|$-Werte kann der Graph näherungsweise durch die nicht senkrechte Asymptote ersetzt werden. Die Gleichung dieser Asymptoten kann mit Hilfe einer *Polynomdivision* bestimmt werden.

3.7 Umkehrfunktionen

Ist die Umkehrzuordnung einer Funktion f wieder eine Funktion, so heisst die Funktion f **umkehrbar.**
Die durch Umkehrung erhaltene Funktion heisst **Umkehrfunktion** oder **inverse Funktion** von f, sie wird mit $\bar{f}$ oder f^{-1} bezeichnet.

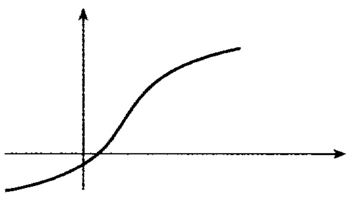
Beispiel:	Funktion:	$A = f(r) = \pi r^2$	$(r > 0)$
	Umkehrfunktion:	$r = \bar{f}(A) = \sqrt{\frac{A}{\pi}}$	$(A > 0)$

Ist die Gleichung $y = f(x)$ einer umkehrbaren Funktion bekannt, so erhält man die Umkehrfunktion $y = \bar{f}(x)$, indem man die Gleichung $y = f(x)$ nach x auflöst und die Variablen x und y vertauscht.

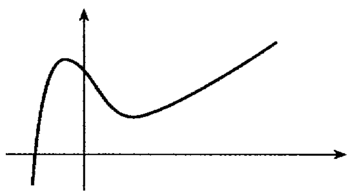
Beispiel:	gegebene Funktion f:	$y = \frac{x}{2x-3}$
	Auflösen nach x:	$x = \frac{3y}{2y-1}$
	Vertauschen der Variablen:	$y = \bar{f}(x) = \frac{3x}{2x-1}$

Eine Funktion f ist umkehrbar, wenn für zwei beliebige Argumente x_1 und x_2 $(x_2 \neq x_1)$ gilt $f(x_1) \neq f(x_2)$.

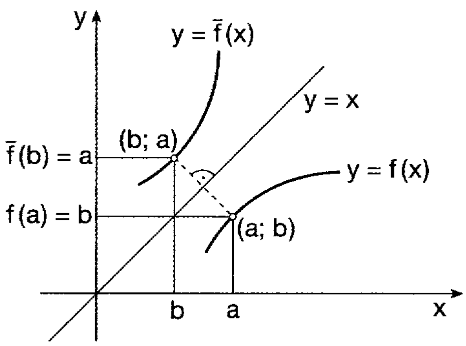
Beispiel:



umkehrbar



nicht umkehrbar



Werden eine Funktion f und ihre Umkehrfunktion $\bar{f}$ in demselben Koordinatensystem $(e_x = e_y)$ grafisch dargestellt, so liegen die Graphen symmetrisch zur Geraden $y = x$ (Winkelhalbierende des 1. Quadranten).

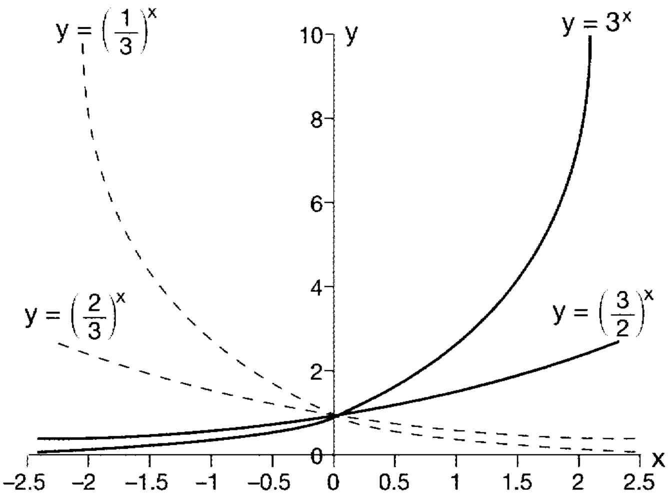
3.8 Wurzelfunktionen

Der Definitionsbereich aller Wurzelfunktionen $f(x) = \sqrt[n]{x}$ $(n = 2, 3, 4, \ldots)$ *sei* $\mathbb{R}_0^+$, *d.h.* $x \geq 0$.

3.9 Exponentialfunktionen

Eine Funktion f mit **$f(x) = a^x$** ($a \in \mathbb{R}^+$ und $a \neq 1$) heisst **Exponentialfunktion.**

Beispiele: $y = 0.8^{x+1}$, $y = 8 \cdot 2^{3x-4}$, $f(t) = A \cdot e^{kt}$, $f(n) = K_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$



Die Graphen der Funktionen $y = a^x$ und $y = \left(\frac{1}{a}\right)^x$ liegen symmetrisch zur y-Achse.

Die x-Achse ist *Asymptote* des Graphen von $y = a^x$.

Exponentialfunktion: $y = a \cdot u^{bx+c} + d$

Logarithmusfunktion: $y = a \cdot \log(bx + c) + d$

c: Verschiebung in X-Richtung	+ links - rechts
d: Verschiebung in Y-Richtung	+ nach oben - nach unten
a: Öffnung der Kurve	- Spiegelung an der x-Achse a > 1 Verkleinerung der Öffnung a < 1 Vergrösserung der Öffnung
b: Öffnung der Kurve	- Spiegelung an der y-Achse b > 1 Verkleinerung der Öffnung b < 1 Vergrösserung der Öffnung

$$\boxed{G(t) = G_0 \cdot a^{t/\tau}}$$

G: Grösse, die exponentiell von der Zeit t abhängt
G_0: Wert der Grösse G im Zeitpunkt $t = 0$
t: Zeit (oder eine andere Grösse)
a: Wachstums- oder Abnahmefaktor bezogen auf die Zeitspanne τ
τ: Zeitspanne, auf die sich a bezieht

Beispiel: Eine Bakterienkultur wachse exponentiell: nach 25 min beträgt der Bestand 500, nach 45 min 1200.

$\tau = 20$ min , $a = \frac{1200}{500} = 2.4$, $N_0 = N/a^{t/\tau} = 500/2.4^{25/20} \approx 167$

Wachstumsfunktion $N = 167 \cdot 2.4^{t/20\,\text{min}}$

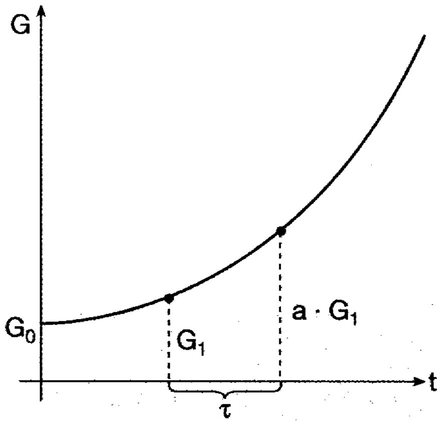
Prozentuale Wachstums- und Abnahmerate

Zur **Wachstumsrate** p % gehört der Wachstumsfaktor $\left(1 + \frac{p}{100}\right)$ und die Wachstumsfunktion $G(t) = G_0\left(1 + \frac{p}{100}\right)^t$.

Zur **Abnahmerate** p % gehört der Abnahmefaktor $\left(1 - \frac{p}{100}\right)$ und die Abnahmefunktion $G(t) = G_0\left(1 - \frac{p}{100}\right)^t$.

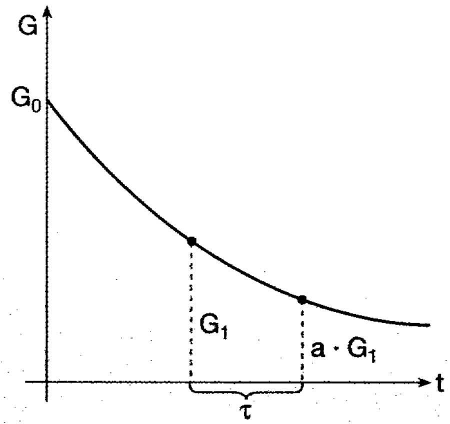
exponentielles Wachstum

$a > 1$



exponentielle Abnahme

$0 < a < 1$



W-Formel : $K_n = K_0\left(1 \pm \frac{p}{100}\right)^n$

K_0 : Anfangswert
K_n : Endwert
p : Wachstum in %
n : Anzahl Wachstumsperioden

aufgelöst nach **p** :

$$p = \pm 100 \cdot \sqrt[n]{\frac{K_n}{K_0}} \mp 100$$

aufgelöst nach **n** :

$$n = \frac{\log(K_n) - \log(K_0)}{\log\left(1 \pm \frac{p}{100}\right)}$$

Bemerkung :
Wenn man den Zerfall berechnen will, muss man mit den unteren Vorzeichen rechnen.

Ein Anfangskapital K_0 ist nach n Jahren bei jährlicher Verzinsung zu p % auf
$K(n) = K_0\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$ angewachsen.

Beispiel:

Ein Kapital K_0 wird mit einem Prozentsatz von 100% für ein Jahr angelegt. Je nachdem wie oft die Kapitalverzinsung erfolgt, ändert sich der Betrag, auf den das Kapital K_0 nach einem Jahr angewachsen ist:

Kapitalverzinsung erfolgt	Kapitalausschüttung nach einem Jahr
jährlich:	$K_1 = K_0 \cdot \left(1+\frac{100}{100}\right)^1 = K_0 \cdot (1+1)^1 = K_0 \cdot 2$
halbjährlich:	$K_2 = K_0 \cdot \left(1+\frac{100}{100 \cdot 2}\right)^2 = K_0 \cdot \left(1+\frac{1}{2}\right)^2 = K_0 \cdot 2.25$
monatlich:	$K_{12} = K_0 \cdot \left(1+\frac{100}{100 \cdot 12}\right)^{12} = K_0 \cdot \left(1+\frac{1}{12}\right)^{12} \approx K_0 \cdot 2.61$
täglich:	$K_{360} = K_0 \cdot \left(1+\frac{100}{100 \cdot 360}\right)^{360} = K_0 \cdot \left(1+\frac{1}{360}\right)^{360} \approx K_0 \cdot 2.7145$
stündlich:	$K_{8640} = K_0 \cdot \left(1+\frac{100}{100 \cdot 8640}\right)^{8640} = K_0 \cdot \left(1+\frac{1}{8640}\right)^{8640} = K_0 \cdot 2.7181$
Erfolgen innerhalb eines Jahres n Kapitalverzinsungen,	so wird das Kapital auf einen Betrag von $K_n = K_0 \cdot \left(1+\frac{100}{100 \cdot n}\right)^n = K_0 \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ anwachsen.

Erfolgen nun unendlich viele Verzinsungen pro Jahr, so wird sich der Betrag mit dem Faktor $e = 2.71828182846...$ vervielfachen. Für $n \to \infty$ nähert sich nämlich der Ausdruck $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ der Zahl e, einer irrationalen Zahl, die als **EULERsche Zahl** in die mathematische Literatur eingegangen ist.

Schreibweise: $\boxed{\lim\limits_{n \to \infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e = 2.71828182846..}$

Hinweis:

Der Ausdruck $\lim\limits_{n \to \infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ wird folgendermassen ausgesprochen:

'limes von $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ für n gegen Unendlich'

4 Anhang - Algebra

4.1 Mengen und Elemente

Fasst man unterscheidbare Objekte mit einem gemeinsamen Merkmal zusammen, so entsteht eine **Menge.**
Die Objekte nennt man **Elemente.**

Elemente einer Menge:

$a \in \mathbb{M}$: a ist ein Element der Menge $\mathbb{M}$.

$b \notin \mathbb{M}$: b ist kein Element der Menge $\mathbb{M}$.

Eine Menge kann endlich viele oder auch unendlich viele Elemente enthalten:

endliche Menge, unendliche Menge.

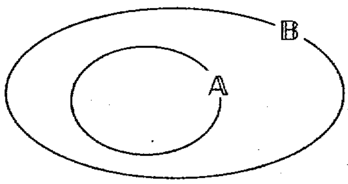
Darstellung von Mengen:

Aufzählende Form:	beschreibende Form:
$\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$	$\mathbb{N}_0 = \{n / n \text{ ist natürliche Zahl oder } n = 0\}$
$\mathbb{P} = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 19, \ldots\}$	$\mathbb{P} = \{z / z \text{ ist Primzahl}\}$
$\mathbb{T}_{18} = \{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$	$\mathbb{T}_{18} = \{r \in \mathbb{N} / r \text{ teilt } 18\}$
$\mathbb{U} = \{\ \}$ leere Menge	$\mathbb{U} = \{x / x - 2 = x\}$
$\mathbb{V} = \{0\}$	$\mathbb{V} = \{y / y + y = y\}$
$\mathbb{B} = \{\text{Parallelogramm, Trapez}\}$	$\mathbb{B} = \{q / q$ ist ein Viereck und q hat mindestens 1 Paar paralleler Seiten$\}$

4.2 Teilmenge

Eine Menge $\mathbb{A}$ ist **Teilmenge** einer Menge $\mathbb{B}$, wenn alle Elemente von $\mathbb{A}$ auch Elemente von $\mathbb{B}$ sind.

Symbol: $\mathbb{A} \subset \mathbb{B}$



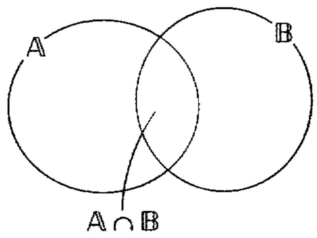
Mengendiagramm

Für jede Menge $\mathbb{M}$ gilt: $\mathbb{M} \subset \mathbb{M}$

Beispiel: $\mathbb{D} = \{1, 2, 3\}$

Teilmengen von $\mathbb{D}$: $\{\ \}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}$

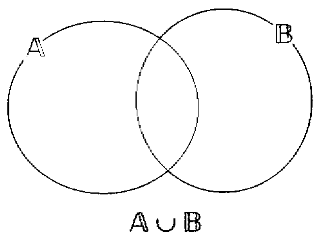
4.3 Schnittmenge und Vereinigungsmenge



Die Menge aller Elemente, die zu $\mathbb{A}$ und zu $\mathbb{B}$ gehören, bilden die **Schnittmenge** (oder Durchschnitt) von $\mathbb{A}$ und $\mathbb{B}$.

Symbol: $\mathbb{A} \cap \mathbb{B}$
«$\mathbb{A}$ geschnitten mit $\mathbb{B}$»

Beispiel: $\{1, 2, 3, 4, 5\} \cap \{2, 4, 6\} = \{2, 4\}$

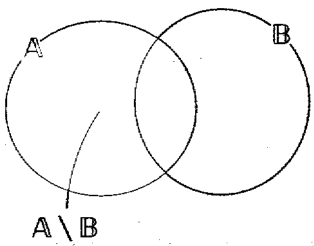


Die Menge aller Elemente, die zu $\mathbb{A}$ oder zu $\mathbb{B}$ (oder zu beiden) gehören, bilden die **Vereinigungsmenge** von $\mathbb{A}$ und $\mathbb{B}$.

Symbol: $\mathbb{A} \cup \mathbb{B}$
«$\mathbb{A}$ vereinigt mit $\mathbb{B}$»

Beispiel: $\{1, 2, 3, 4, 5\} \cup \{2, 4, 6\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

4.4 Differenzmenge



Die Elemente von $\mathbb{A}$, die nicht zu $\mathbb{B}$ gehören, bilden die **Differenzmenge.**

Symbol: $\mathbb{A} \setminus \mathbb{B}$
«$\mathbb{A}$ ohne $\mathbb{B}$»

Beispiel: $\{1, 2, 3, 4, 5\} \setminus \{1, 3, 5, 6\} = \{2, 4\}$

4.5 Exakte Werte und Nähreungswerte

Beispiel: Flächeninhalt eines gleichseitigen Dreiecks mit der Seitenlänge s

$$A = \underbrace{0.25 \cdot \sqrt{3}}_{\text{exakte Werte}} \cdot s^2 \approx \underbrace{0.433}_{\text{Näherungswert}} s^2$$

Näherungswerte können auf zwei Arten entstehen:

(1) durch *Messen* einer Grösse: *Jeder Messwert ist ein Näherungswert*

(2) durch *Runden* eines (exakten) Wertes

Beispiele zu (2):

exakter Wert	Beispiele für Näherungswerte
$\sqrt{3}$	2 ; 1.7 ; 1.73205
π	3 ; $\frac{22}{7}$; 3.1416

Rundungsregel

Soll ein Dezimalbruch auf n Dezimalen (n Ziffern nach dem Dezimalpunkt) gerundet werden, so ist für die Rundung ausschliesslich die nachfolgende Ziffer massgebend:

– die Ziffern 0, 1, 2, 3 und 4 werden *abgerundet;*

– die Ziffern 5, 6, 7, 8 und 9 werden *aufgerundet.*

Beispiele:

56.3456	auf 2 Dezimalen gerundet:	56.35
3.1749	auf 2 Dezimalen gerundet:	3.17
123.5499	auf 1 Dezimale gerundet:	123.5

Geltende Ziffern (auch signifikante oder wesentliche Ziffern genannt)

Die Messwerte 248 cm, 2.48 m und 0.00248 km sind offensichtlich gleich genau, obwohl die Masszahlen unterschiedliche Anzahl Dezimalen aufweisen.
Mit dem Begriff **geltende Ziffern** lässt sich die Genauigkeit eines Näherungswertes vorschreiben, unabhängig von der gewählten Masseinheit.

Beispiele:

Näherungswert	$0.00\underline{6}$	$0.0\underline{60}$	$\underline{6.0}$	$\underline{30.05}$	$\underline{700}$	$\underline{7} \cdot 10^2$
Anzahl geltende Ziffern	1	2	2	4	3	1

4.6 Absoluter und relativer Fehler

Um die Genauigkeit eines Näherungswertes anzugeben, sind zwei Fälle zu unterscheiden:

(1) **Der exakte Wert ist bekannt**

absoluter (wahrer) Fehler:	$\varepsilon = \lvert a - \bar{a} \rvert$
relativer Fehler	$\rho = \dfrac{\varepsilon}{\lvert a \rvert}$

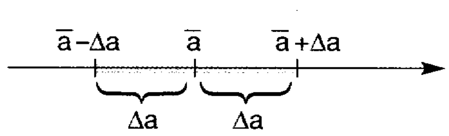
a : exakter Wert
$\bar{a}$: Näherungswert

Der relative Fehler wird meistens in % angegeben.

Beispiel: An Stelle des exakten Wertes $\frac{2}{7}$ werde der Näherungswert 0.3 verwendet.
absoluter Fehler: $\varepsilon \approx 0.015$; relativer Fehler: $\rho \approx 5\,\%$

(2) **Der exakte Wert ist unbekannt** (z.B. Messwerte)
Da der wahre Fehler ε nicht berechnet werden kann, gibt man eine Fehlerschranke Δa an. Der exakte Wert a liegt dann zwischen $\bar{a} - \Delta a$ und $\bar{a} + \Delta a$.

Schreibweise: $\boxed{a = \bar{a} \pm \Delta a}$



Die Fehlerschranke Δa nennt man *absoluter Fehler,* sie ist immer positiv.

Beispiel: $a = 2.4\text{ m} \pm 0.2\text{ m} = (2.4 \pm 0.2)\text{ m}$

Messwert $\bar{a} = 2.4\text{ m}$; absoluter Fehler $\Delta a = 0.2\text{ m}$

Ein Näherungswert und sein absoluter Fehler sollen stets dieselbe Anzahl Dezimalen aufweisen.
Nicht korrekt sind z.B. (18 ± 0.3) cm oder (4.08 ± 0.1) kg.

relativer Fehler	$\rho = \dfrac{\Delta a}{\lvert \bar{a} \rvert} \cdot 100\,\%$

Beispiel: $(17.3 \pm 0.3)\text{ mm} \approx 17.3\text{ mm} \pm 1.8\,\%$

Absoluter und relativer Fehler werden stets *aufgerundet* und mit höchstens *zwei* geltenden Ziffern angegeben.

4.7 Rechnern mit Näherungswerten

Beispiel: Von einem geraden Kreiszylinder kennt man den Radius $r = (6.1 \pm 0.2)$ cm und die Höhe $h = (8.0 \pm 0.2)$ cm.
Gesucht sei das Volumen $V = \overline{V} \pm \Delta V$.

Formel: $V = \pi\, r^2 h$

gegebene Grössen: $5.9 \text{ cm} \le r \le 6.3 \text{ cm}$
$7.8 \text{ cm} \le h \le 8.2 \text{ cm}$

Minimum: $V_{min} = \pi \cdot 5.9^2 \cdot 7.8 \text{ cm}^3 = 853.00 \text{ cm}^3$

Maximum: $V_{max} = \pi \cdot 6.3^2 \cdot 8.2 \text{ cm}^3 = 1022.46 \text{ cm}^3$

absoluter Fehler: $\Delta V = \frac{1}{2}(V_{max} - V_{min}) \approx 85 \text{ cm}^3$

Näherungswert: $\overline{V} = \frac{1}{2}(V_{max} + V_{min}) \approx 938 \text{ cm}^3$

$\underline{V = (938 \pm 85) \text{ cm}^3}$

4.8 Rechnern mit Näherungswerten ohne Fehlerangabe

Annahme: Bei Näherungswerten ohne Fehlerangabe sei der absolute Fehler *eine*[1] Einheit der letzten Ziffer.

Beispiel: $s = 2.1$ cm bedeutet $s = (2.1 \pm 0.1)$ cm

Unter dieser Voraussetzung gelten die folgenden *Faustregeln* (d.h. der absolute Fehler des Resultates ist im allgemeinen nicht grösser als eine Einheit der letzten Ziffer):

(1) Bei der **Addition** und **Subtraktion** von Näherungswerten ist im Resultat die gleiche Anzahl *Dezimalen* anzugeben, die der ungenaueste Näherungswert aufweist.

Beispiele: $12 + 1.3 = 13$, $2.78 - 0.6 = 2.2$

(2) Bei der **Multiplikation** und **Division** von Näherungswerten ist im Resultat die gleiche Anzahl *geltender Ziffern* anzugeben, die der ungenaueste Näherungswert (am wenigsten geltende Ziffern) aufweist.

Beispiele: $7.40 \cdot 3.142 = 23.3$, $\dfrac{87.3 \cdot 0.02}{14.28} = 0.1$

Geometrie

5 Mathematische Symbole

Figuren (geometrische Objekte)

Symbol	Figur
A, B, C, . . .	Punkt
a, b, c, . . . AB, AP, XY, . . .	Gerade
ε, ε(ABC), . . .	Ebene
a, b, c, . . ., $\overline{AB}$, $\overline{AP}$, . .	Strecke
α, β, γ, . . . , $\angle ASB$, .	Winkel
ΔABC, ΔUVW, . . .	Dreieck Figur Gebiet Fläche
A_{ABC}, A_{UVW}, . . .	Flächeninhalt

Mathematische Logik

Symbol	Bedeutung
$\wedge$	. . . und . . .
$\vee$	. . . oder . . .
$\Rightarrow$	wenn . . . , dann . . .
$\Leftrightarrow$	. . . genau dann, wenn . . . . . . ist äquivalent zu . . .

Relationen

Symbol	Bedeutung
$\perp$	senkrecht
//	parallel
$\in$	. . . ist Element von . . .
$\notin$	. . . ist nicht Element von . . .
$\cap$	geschnitten mit . . .
$\cup$	vereinigt mit . . .
$\cong$	kongruent
$\sim$	ähnlich

Vektorgeometrie

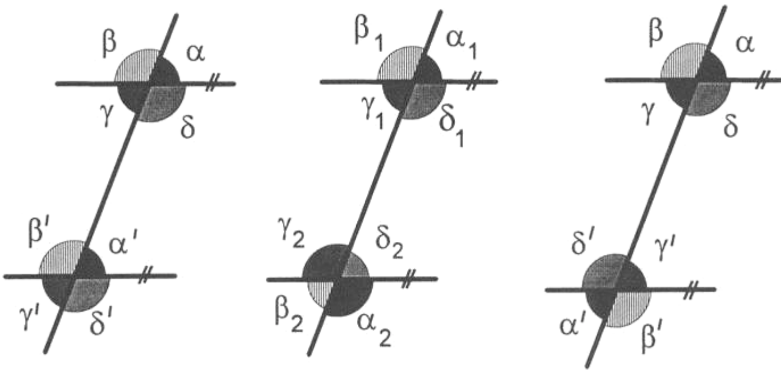
Symbol	Bedeutung
$\vec{x}$, $\overrightarrow{AB}$, . . .	Vektor
$\vec{r}_A$, $\overrightarrow{OA}$	Ortsvektor des Punktes A
$\lvert\vec{x}\rvert$, x	Betrag
$\vec{a} = (a/\varphi)$	Vektor in Polarform
$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$	Vektor in Komponentenform
$\angle(\vec{a}, \vec{b})$	Winkel zwischen Vektoren

6 Planimetrie

6.1 Winkel

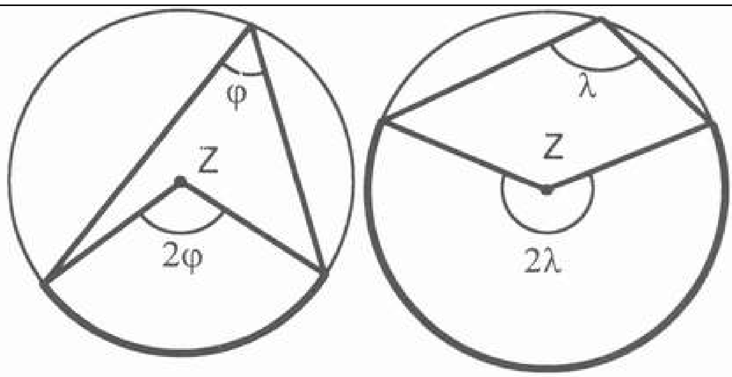
6.1.1 **Winkel an geschnittenen Parallelen, Winkel am Dreieck**

Winkel an geschnittenen Parallelen

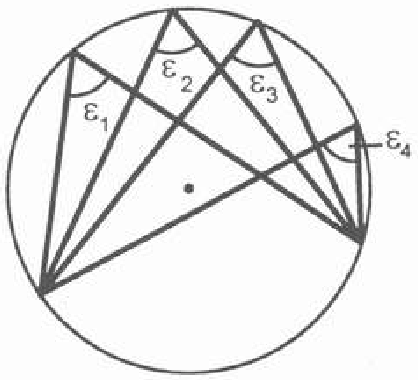


Stufenwinkel	Gegenwinkel	Wechselwinkel
$\alpha = \alpha'$	$\alpha_1 + \alpha_2 = 180°$	$\alpha = \alpha'$
$\beta = \beta'$	$\beta_1 + \beta_2 = 180°$	$\beta = \beta'$

6.1.2 **Winkel am Kreis**

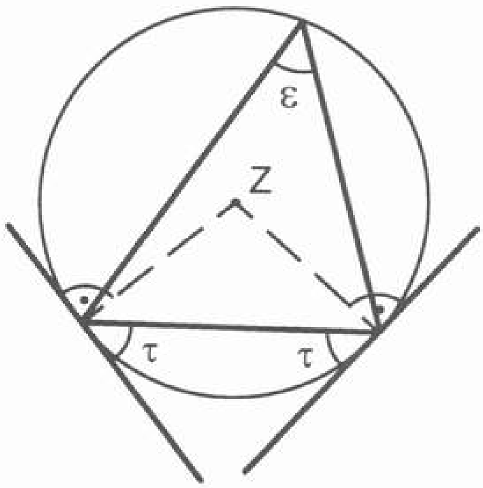


Ein **Periferiewinkel** ist halb so gross wie der zugehörige **Zentriwinkel**.



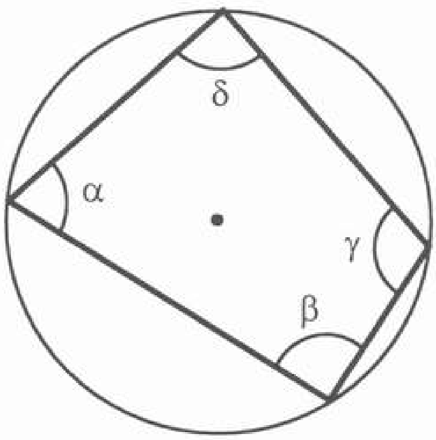
Alle **Periferiewinkel** über gleichem Bogen sind gleich gross:

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \varepsilon_4$$



Ein **Sehnentangentenwinkel** ist gleich gross wie ein Periferiewinkel über dem eingeschlossenen Bogen:

$$\tau = \varepsilon$$



Sehnenviereck

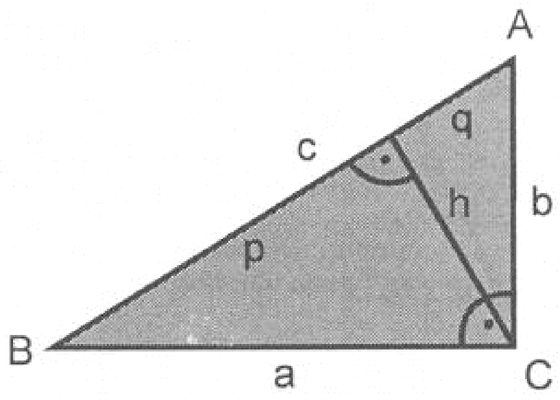
Ein Viereck, das einen Umkreis hat, heisst Sehnenviereck

Im Sehnenviereck beträgt die Summe zweier gegenüberliegender Winkel 180°:

$$\alpha + \gamma = 180°$$
$$\beta + \delta = 180°$$

6.2 *Berechnungen am Dreieck und Viereck*

Das rechtwinklige Dreieck



a,b: Katheten

c: Hypotenuse

p,q: Hypotenusen-abschnitte

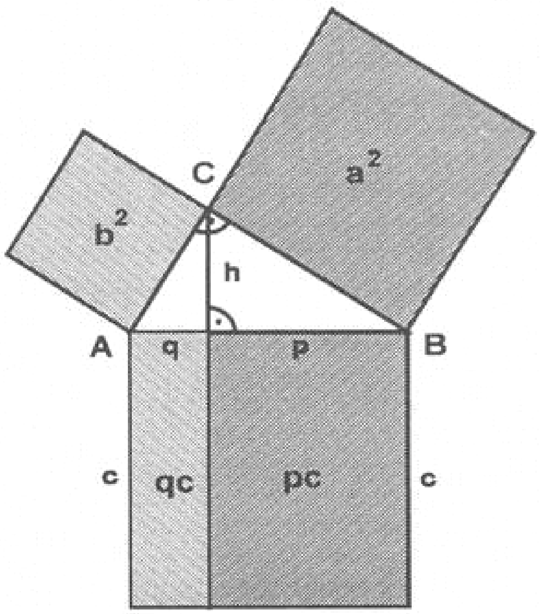
Satz des Pythagoras: $a^2 + b^2 = c^2$

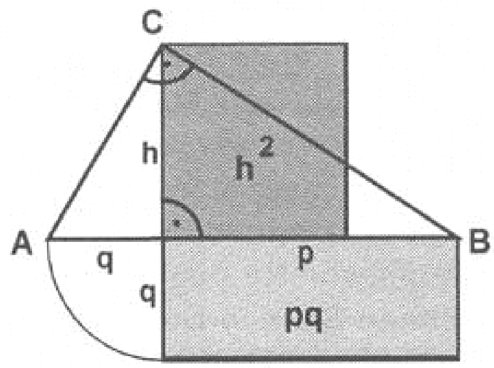
Satz des Euklid (Kathetensatz):

$$a^2 = p \cdot c$$
$$b^2 = q \cdot c$$

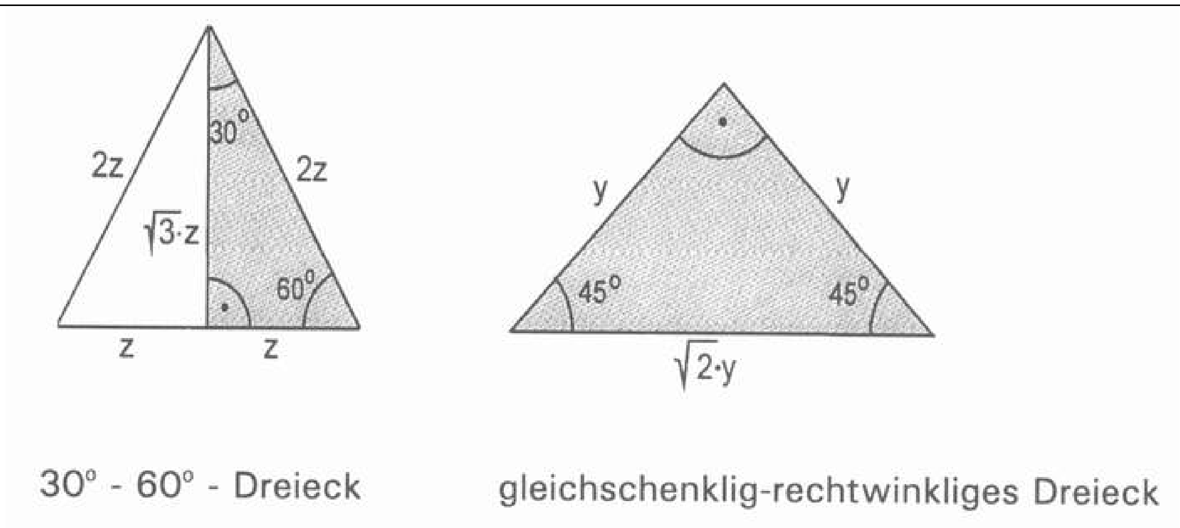
Höhensatz:

$$h^2 = p \cdot q$$





6.2.1 Spezielle Dreiecke

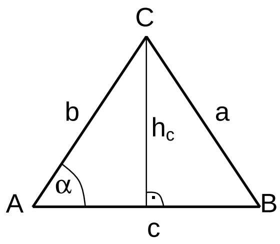


6.2.2 Weitere Formeln für die Fläche :

Satz des Heron : $A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ (s = halber Umfang)

$A = \frac{1}{2} bc \cdot \sin(\alpha)$

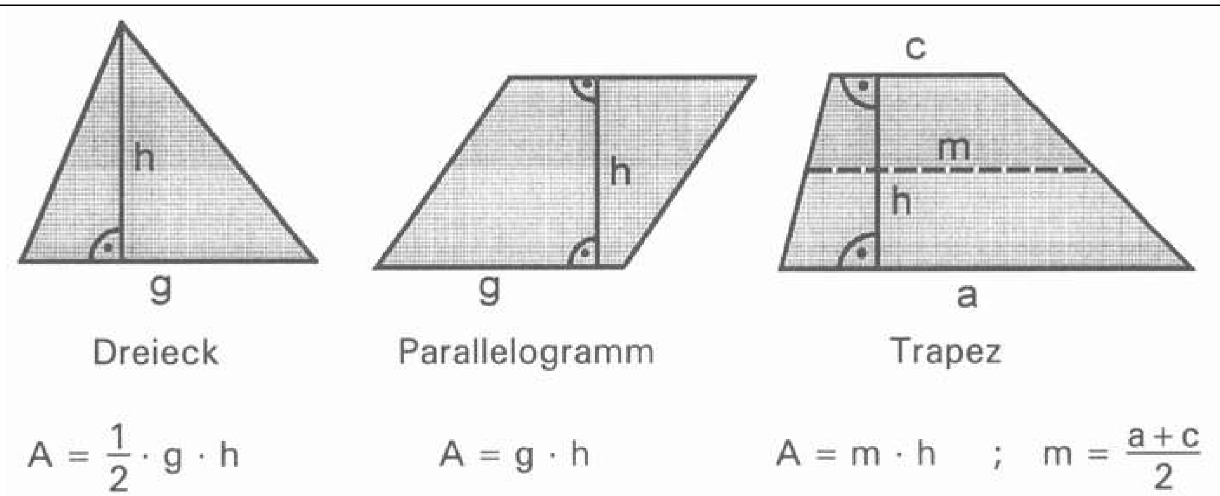
2 Seiten eingeschl. Winkel



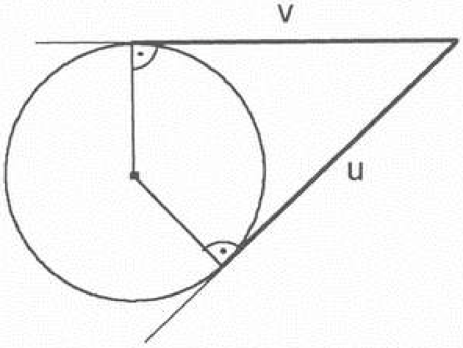
$h_c = b \cdot \sin(\alpha)$

$A = \frac{1}{2}\sqrt{|\vec{a}|^2 \cdot |\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2}$

6.2.3 Berechnung von Flächeninhalten und Abständen

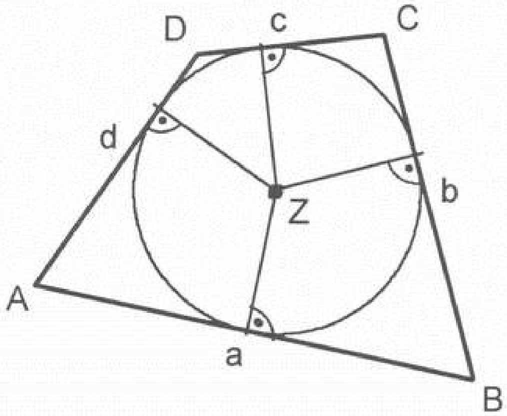


6.2.4 Tangentenabschnitte, Tangentenviereck



Tangentenabschnitte:

Die Abschnitte u und v der Tangenten von einem Punkt an einen Kreis sind gleich lang.



Tangentenviereck:

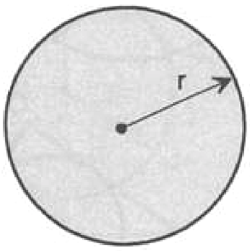
In jedem Tangentenviereck sind die Summen zweier Gegenseiten gleich gross.

$$\boxed{a + c = b + d}$$

6.3 *Berechnungen am Kreis*

6.3.1 Kreis und Kreisring

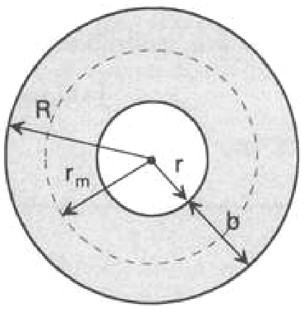
Kreis:



Umfang: $u = 2\pi r$

Flächeninhalt: $A = \pi r^2$

Kreisring:



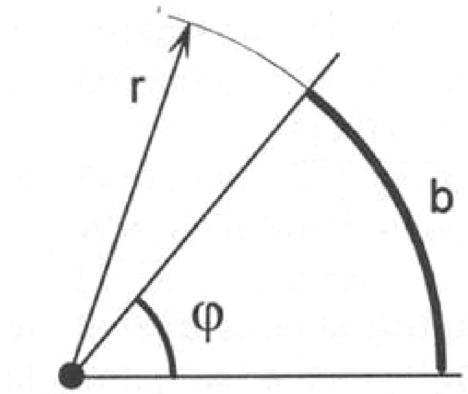
Ringbreite: $b = R - r$

Flächeninhalt: $A = \pi(R^2 - r^2)$

$A = 2\pi r_m \cdot b$

$r_m = r + \dfrac{b}{2}$

6.3.2 Das Bogenmass



Winkel φ im Bogenmass:

$$\overset{\frown}{\varphi} = \frac{b}{r}$$

r: beliebiger Radius
b: Länge des Kreisbogens

$180° = \pi$ rad

α	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
b	0	π/6	π/4	π/3	π/2	π	3π/2	2π
sin(α)	0	1/2	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1	0	-1	0
cos(α)	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	1/2	0	-1	0	1
tan(α)	0	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$	n.def	0	n.def	0
cot(α)	n.def	$\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}/3$	0	n.def	0	n.def

Potenzreihen für sin x , cos x und tan x

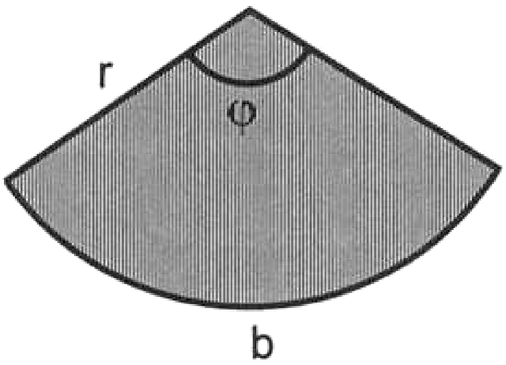
$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots, x \in R$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots, x \in R$$

$$\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + \frac{62}{2835}x^9 + \ldots, \quad |x| < \frac{\pi}{2}$$

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot n \qquad \text{(n Fakultät)}$$

6.3.3 Der Sektor



r: Radius

b: Bogenlänge

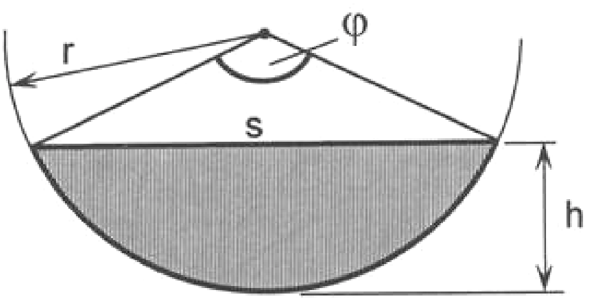
φ: Zentriwinkel; $0 < \hat{\varphi} < 2\pi$

A_{SK}: Flächeninhalt

$$b = \frac{\varphi}{360^\circ} \cdot 2\pi r = \hat{\varphi} \cdot r$$

$$A_{SK} = \frac{\varphi}{360^\circ} \cdot \pi r^2 = \frac{1}{2} \hat{\varphi}\, r^2 ; \qquad A_{SK} = \frac{1}{2} b r$$

6.3.4 Das Segment



r: Radius

φ: Zentriwinkel; $0 < \hat{\varphi} < 2\pi$

s: Sehnenlänge

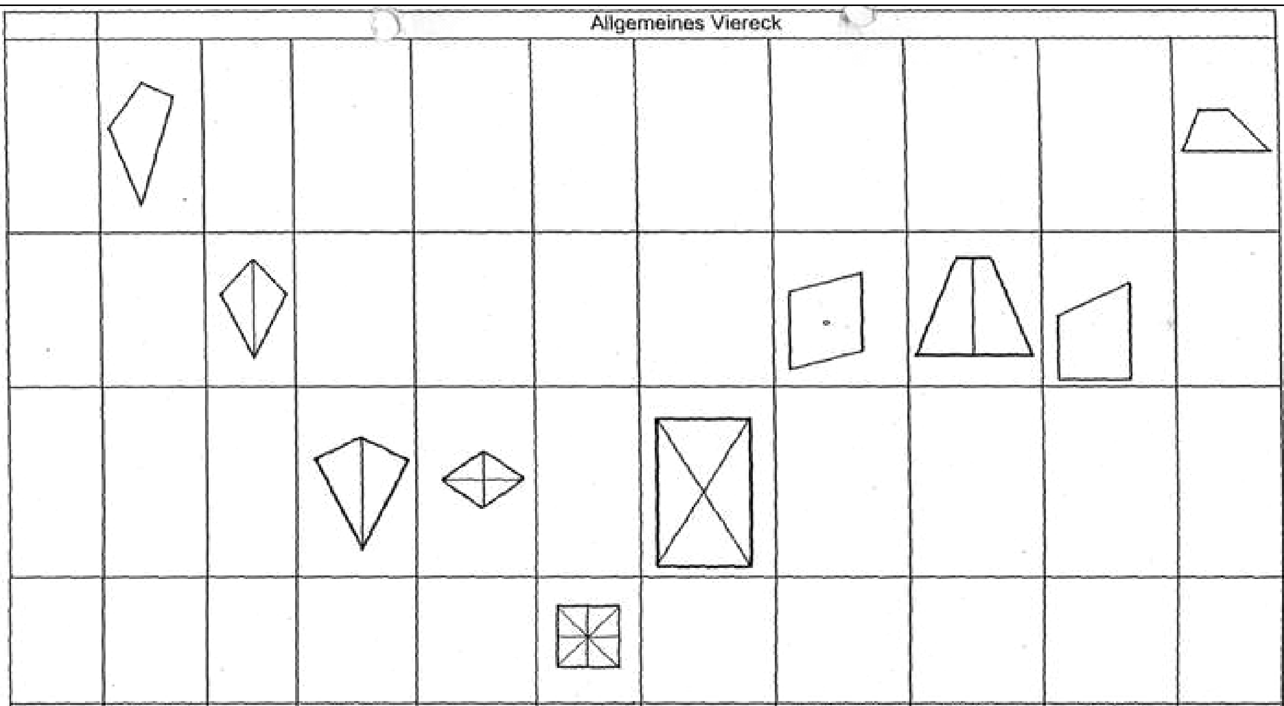
h: Segmenthöhe

A_{SG}: Flächeninhalt

$$A_{SG} = \begin{cases} A_{SK} - A_{Dreieck}, & \text{falls } \hat{\varphi} < \pi \\ A_{SK} + A_{Dreieck}, & \text{falls } \hat{\varphi} > \pi \end{cases}$$

6.4 *Diverse Formeln zum Kapitel Planimetrie*

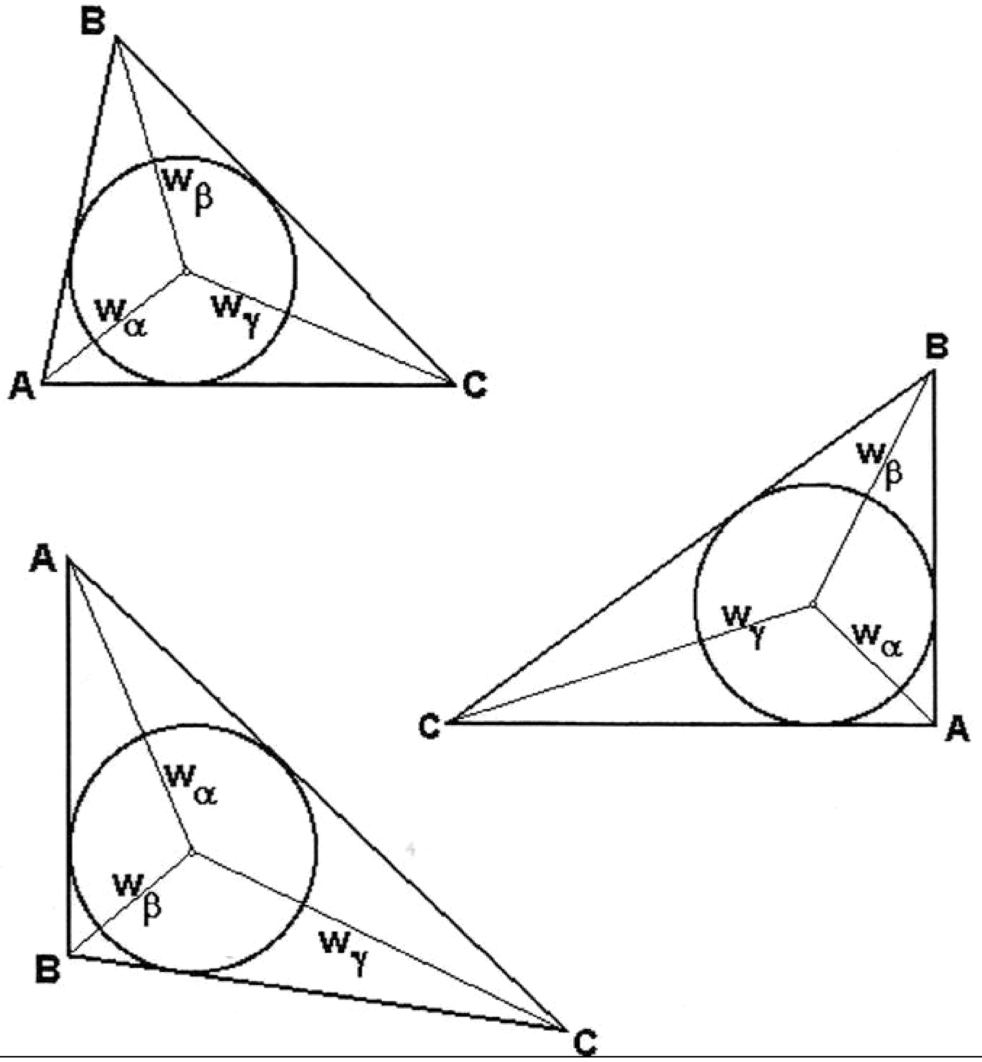
6.4.1 **Viereck**



	Schräger Drachden	Drachen	Rechtw. Drachen	Rhombus	Quadrat	Rechteck	Parallelo-gramm	Gleichsch. Trapez	Rechtw. Trapez	Trapez
Gleiche Seiten		2 Paar	2 Paar	alle 4	alle 4	2 Paar	2 Paar	1 Paar		
Gleiche Winkel		1 Paar	1 Paar	2 Paar	alle 4	alle 4	2 Paar	2 Paar	1 Paar	
Parallele Seiten				2 Paar	2 Paar	2 Paar	2 Paar	1 Paar	1 Paar	1 Paar
Diago-nalen	1 halbiert	senk-recht	senkrecht halbieren sich	senkrecht halbieren sich	gleich lang halbieren sich	gleich lang halbieren sich	halbieren sich	Gleich lang		
Symme-trien	keine	1 achsig	1 achsig	2 achsig punkt-symm.	4 achsig punkt-symm.	2 achsig punkt-symm.	punkt-symm.	1 achsig		
Kreise		Inkreis	Umkreis Inkreis	Inkreis	Umkreis Inkreis	Umkreis		Umkreis		

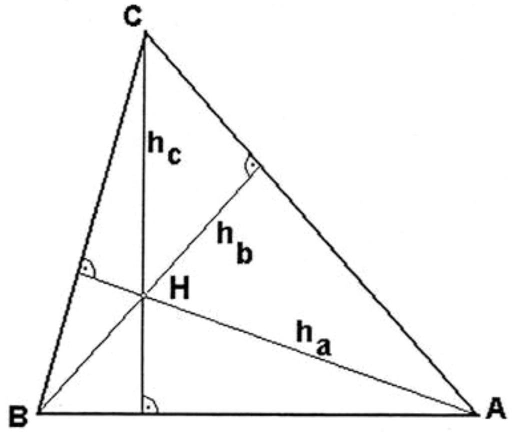
6.4.2 **Winkelhalbierende**

Die Winkelhalbierenden w_α, w_β, w_γ eines Dreiecks ABC schneiden sich im Inkreismittelpunkt



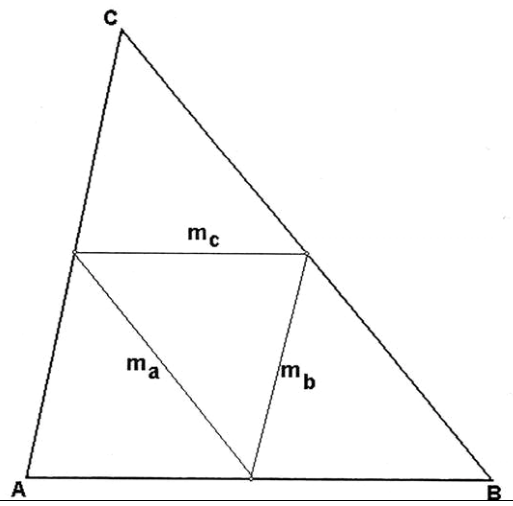
6.4.3 **Höhen**

Die Höhenlinien h_a, h_b, h_c eines Dreiecks ABC schneiden sich im Höhenschnittpunkt.



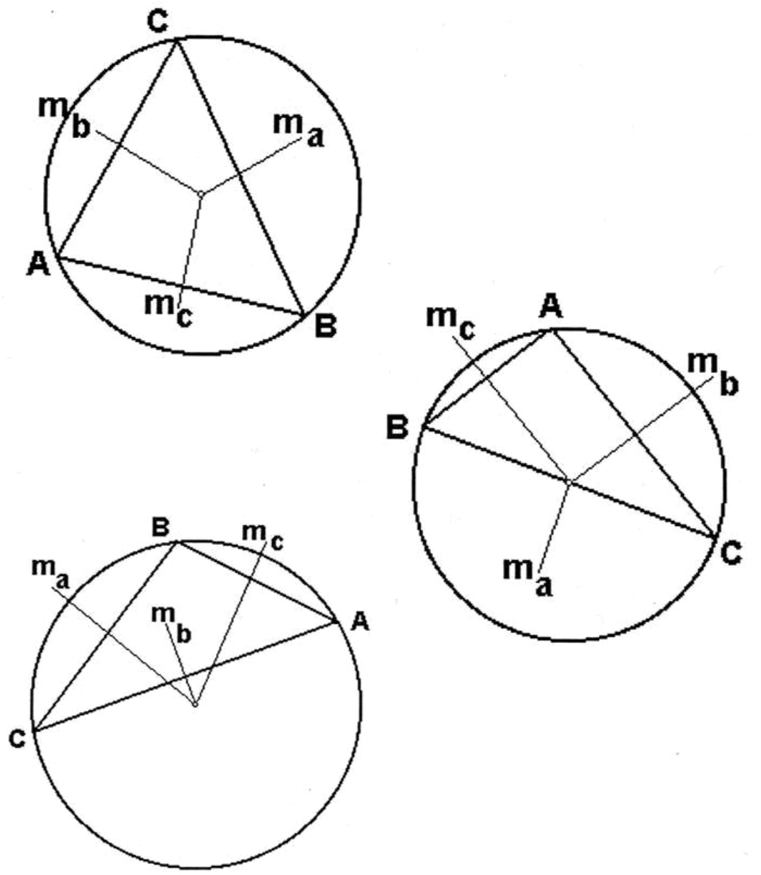
6.4.4 **Mittellinien**

Die Mittellinien m_a, m_b, m_c eines Dreieck ABC sind halb so lang wie die Gegenseiten und parallel zu diesen. Sie teilen das Dreieck in vier kongruente Teildreiecke.



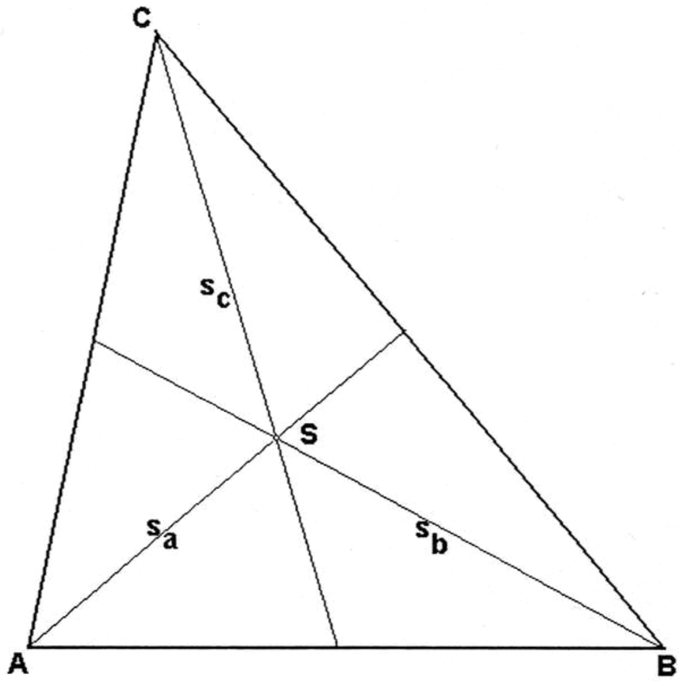
6.4.5 **Mittelsenkrechten**

Die Mittelsenkrechten m_a, m_b, m_c eines Dreiecks ABC schneiden sich im Umkreismittelpunkt.



6.4.6 **Schwerlinien**

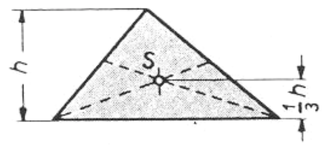
Die Seitenhalbierenden (Schwerelinien) s_a, s_b, s_c eines Dreiecks ABC schneiden sich im Schwerpunkt S.
Der Schwerpunkt teilt die Seitenhalbierenden im Verhältnis 2 : 1



6.4.7 **Schwerlinien**

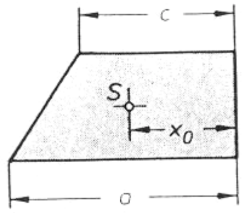
Schwerpunkte von Flächen

Dreieck



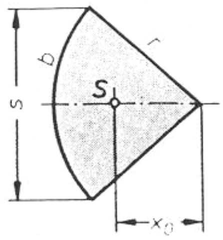
S liegt im Schnittpunkt der Seitenhalbierenden; siehe Lehrsatz 60/1

Rechtwinkliges Trapez



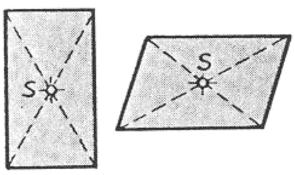
$$x_0 = \frac{a^2 + ac + c^2}{3\,(a + c)}$$

Kreisausschnitt



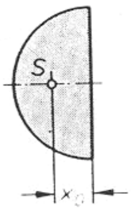
$$x_0 = \frac{2}{3} \cdot \frac{r\,s}{b}$$

Rechteck und Parallelogramm



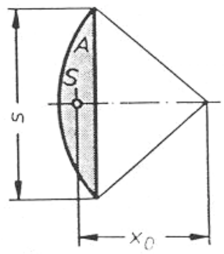
S liegt im Schnittpunkt der Diagonalen

Halbkreis



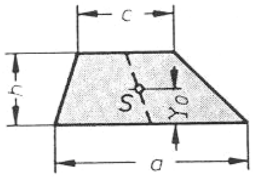
$$x_0 = \frac{4\,r}{3\,\pi} = 0{,}424 \cdot r$$

Kreisabschnitt



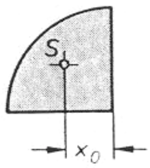
$$x_0 = \frac{s^3}{12\,A}$$ (A: siehe Kap. 15.3.)

Trapez



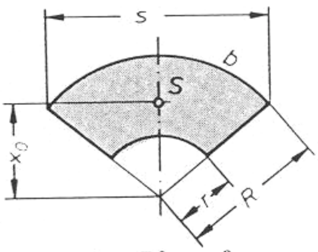
$$y_0 = \frac{h}{3} \cdot \frac{a + 2c}{a + c}$$

Viertelkreis



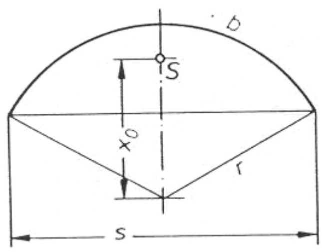
$$x_0 = \frac{4\,r}{3\,\pi} = 0{,}424 \cdot r$$

Kreisringfläche



$$x_0 = \frac{2}{3} \cdot \frac{R^3 - r^3}{R^2 - r^2} \cdot \frac{s}{b}$$

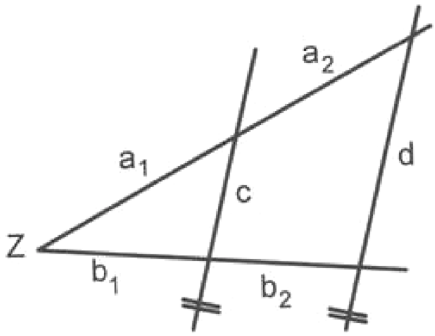
Schwerpunkt der Kreislinie



$$x_0 = \frac{r \cdot s}{b}$$

6.5 *Strahlensätze*

Werden zwei Halbgeraden, die von einem Punkt Z (Scheitel) ausgehen, von mindestens zwei Parallelen geschnitten, so heisst diese Anordnung **Strahlensatzfigur**.



a_n , b_n heissen **Strahlenabschnitte**

c , d heissen **Parallelenabschnitte**

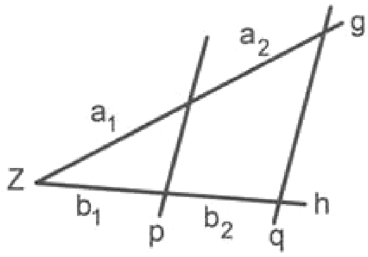
Erster Strahlensatz (ohne Parallelenabschnitte)

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \quad \text{oder} \quad \frac{a_1}{a_1 + a_2} = \frac{b_1}{b_1 + b_2}$$

Zweiter Strahlensatz (mit Parallelenabschnitten)

$$\frac{c}{d} = \frac{a_1}{a_1 + a_2} \quad \text{oder} \quad \frac{c}{d} = \frac{b_1}{b_1 + b_2}$$

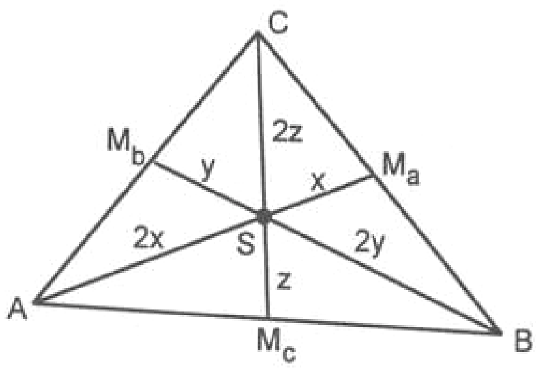
Umkehrung des ersten Strahlensatzes



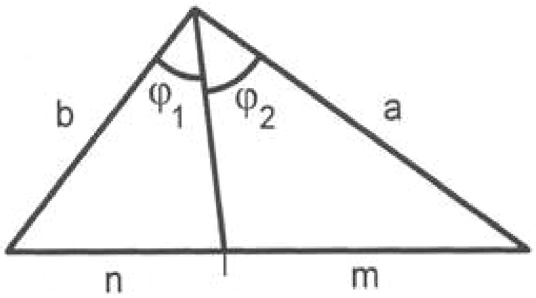
Gegeben sind:
- zwei Halbgeraden g und h mit gemeinsamem Anfangspunkt Z
- zwei Geraden p und q, welche die Halbgeraden schneiden

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \quad \Rightarrow \quad \text{p und q sind parallel}$$

Die **Umkehrung des zweiten Strahlensatzes** gilt nicht.



Der Schwerpunkt S eines beliebigen Dreiecks teilt jede Schwerlinie im Verhältnis 2 : 1.



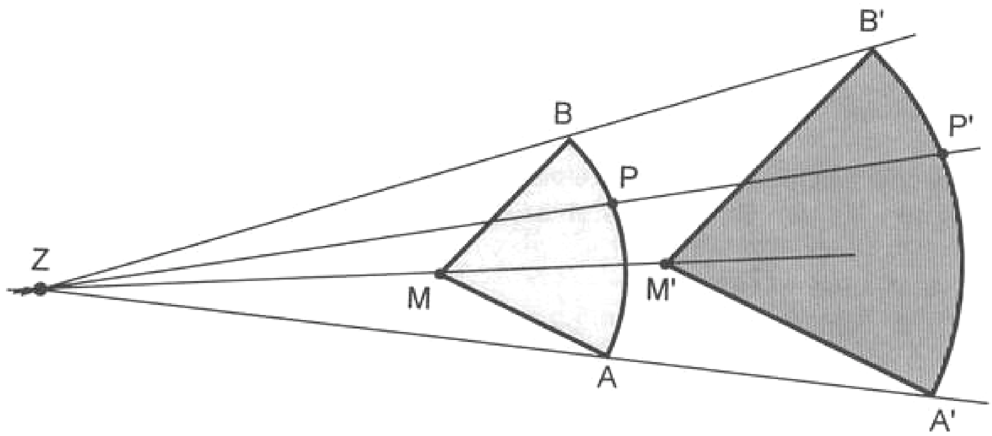
In jedem Dreieck gilt:

Eine Winkelhalbierende ($\varphi_1 = \varphi_2$) teilt die Gegenseite im Verhältnis der anliegenden Seiten.

$$\boxed{\frac{m}{n} = \frac{a}{b}}$$

6.6 *Ähnliche Figuren*

6.6.1 Die zentrische Streckung



Eine Abbildung heisst **zentrische Streckung** mit dem **Streckungszentrum Z** und dem **Streckungsfaktor k** (k ist eine positive, reelle Zahl)[1], wenn gilt:

(1) Der Bildpunkt P' des Originalpunktes P liegt auf dem Strahl ZP

und

(2) $\overline{ZP'} = k \cdot \overline{ZP}$

$0 < k < 1$: Das Bild ist kleiner als das Original; *Verkleinerung*
$1 < k$: Das Bild ist grösser als das Original; *Vergrösserung*
$k = 1$: Bild und Original sind kongruent.

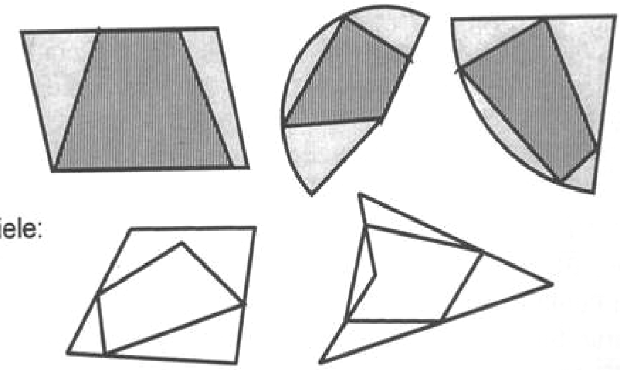
Eigenschaften der zentrischen Streckung

(1) Eine *Gerade* wird auf eine Gerade abgebildet. Gerade und Bildgerade sind parallel.
(2) Das Bild einer *Strecke* hat die k-fache Länge: $\mathbf{a' = k \cdot a}$
(3) *Winkel* werden auf gleich grosse Winkel abgebildet: $\alpha' = \alpha$
(4) Das Bild eines *Kreises* ist ein Kreis mit dem Radius $\mathbf{r' = k \cdot r}$
(5) Der *Flächeninhalt* der Bildfigur ist k^2-mal so gross wie der Flächeninhalt des Originals: $\mathbf{A' = k^2 \cdot A}$

Ein konvexes Vieleck A heisst einer konvexen Figur B **einbeschrieben**, wenn jede Ecke von A auf dem Rand von B liegt.

Beispiele:

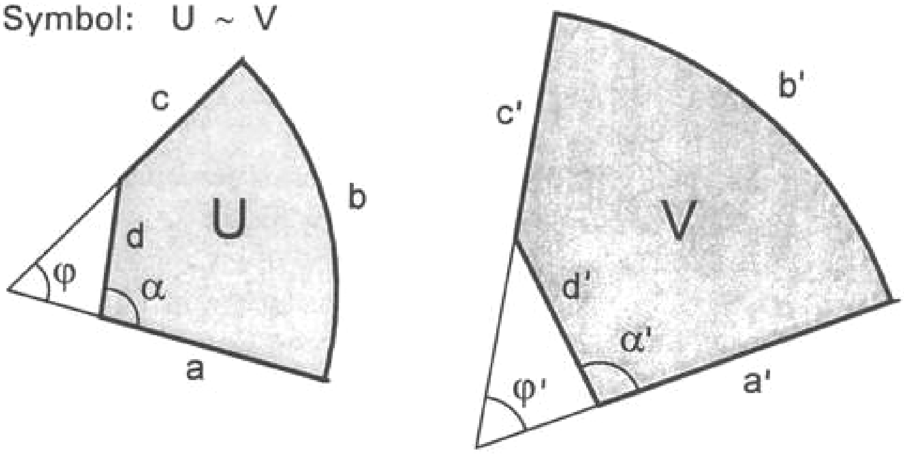
Gegenbeispiele:



6.6.2 Ähnliche Figuren

Eine Figur U heisst **ähnlich** zu einer Figur V, wenn man U mit Hilfe einer zentrischen Streckung so vergrössern oder verkleinern kann, dass sie zu V kongruent ist.

Symbol: $U \sim V$



In ähnlichen Figuren sind alle entsprechenden Winkel gleich gross, und alle entsprechenden Strecken als auch Kurven haben dasselbe Längenverhältnis.

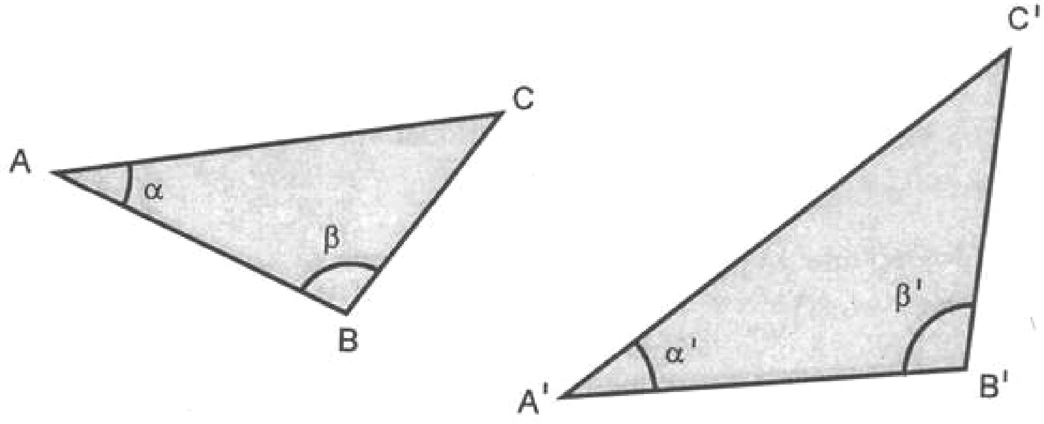
$$U \sim V \iff \begin{cases} \varphi' = \varphi\,, \quad \alpha' = \alpha \\ k = \dfrac{a'}{a} = \dfrac{b'}{b} = \dfrac{c'}{c} = \ldots\ldots = \dfrac{a'+b'+c'+d'}{a+b+c+d} \end{cases}$$

k : Streckungsfaktor Figur U $\xrightarrow{k}$ Figur V

Flächeninhalte: A_U : Flächeninhalt Figur U A_V : Flächeninhalt Figur V

$$U \sim V \Rightarrow k^2 = \frac{A_V}{A_U}$$

6.6.3 Ähnliche Dreiecke



Stimmen zwei Dreiecke in <u>zwei</u> Winkeln überein, dann sind sie ähnlich.

$\alpha = \alpha' \wedge \beta = \beta' \Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$

Wenn zwei Dreiecke ähnlich sind, dann haben zwei entsprechende Strecken (z.B. Seiten, Höhen, Winkelhalbierende, Umkreisradien, Umfänge, ...) das gleiche Längenverhältnis.

$$\Delta ABC \sim \Delta A'B'C' \Rightarrow \quad k = \frac{a'}{a} = \frac{h'}{h} = \frac{w'}{w} = \frac{r'}{r} = \ldots\ldots = \frac{u'}{u}$$

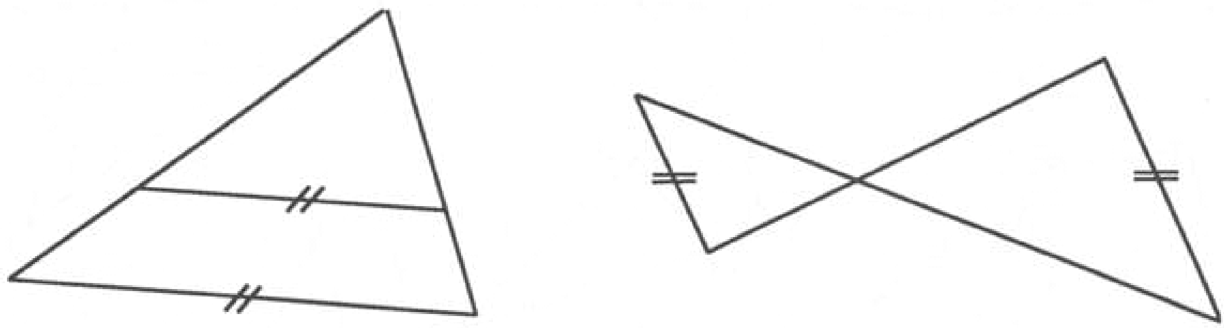
$$a' = k \cdot a, \quad h' = k \cdot h, \ldots\ldots$$

k: Streckungsfaktor $\Delta ABC \xrightarrow{k} \Delta A'B'C'$

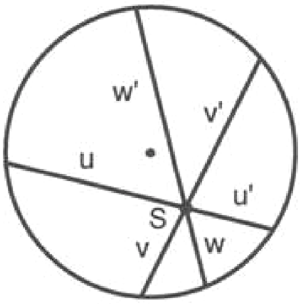
Die Flächeninhalte ähnlicher Dreiecke verhalten sich wie die Quadrate entsprechender Strecken.

$$\Delta ABC \sim \Delta A'B'C' \Rightarrow \frac{A_{A'B'C'}}{A_{ABC}} = \left(\frac{a'}{a}\right)^2 = \left(\frac{h'}{h}\right)^2 = \ldots\ldots = k^2$$

$$\Rightarrow A_{A'B'C'} = k^2 \cdot A_{ABC}$$

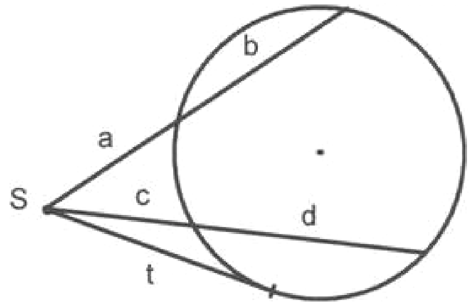


6.6.4 Ähnlichkeit am Kreis



Sehnensatz:

$$\boxed{uu' = vv' = ww'}$$



Sekanten-Tangentensatz:

$$\boxed{a\,(a+b) = c\,(c+d) = t^2}$$

Zusammengefasst (Potenzsatz):

Für jede Transversale eines Kreises durch einen Punkt S ist das Produkt der Entfernungen zwischen S und den Schnittpunkten mit dem Kreis jeweils konstant. Liegt S ausserhalb des Kreises, so hat auch das Quadrat des Tangentenabschnittes denselben Wert.

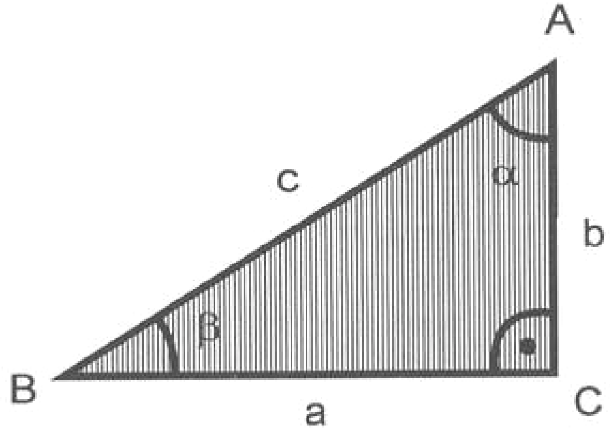
7 Trigonometrie

7.1 *Das rechtwinklige Dreieck*

Definition:

$$\sin\varphi = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}} \qquad \cos\varphi = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}$$

$$\tan\varphi = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}} \qquad \left(0^0 < \varphi < 90^0\right)$$



a, b: Katheten

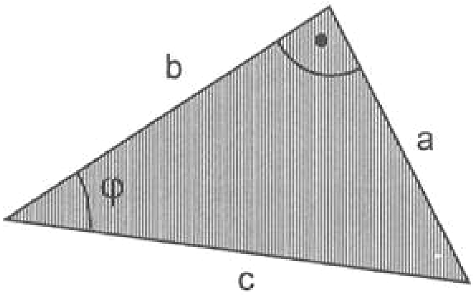
c: Hypotenuse

$$\sin\alpha = \frac{a}{c} \qquad \sin\beta = \frac{b}{c}$$

$$\cos\alpha = \frac{b}{c} \qquad \cos\beta = \frac{a}{c}$$

$$\tan\alpha = \frac{a}{b} \qquad \tan\beta = \frac{b}{a}$$

7.1.1 Die Arcusfunktion



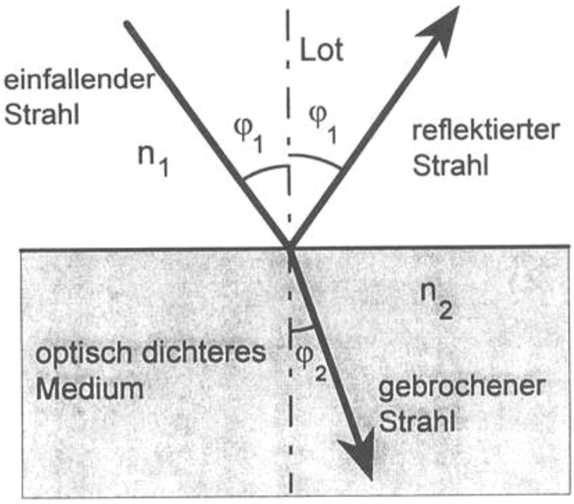
$$\sin\varphi = \frac{a}{c} \Rightarrow \varphi = \arcsin\left(\frac{a}{c}\right)$$

$$\cos\varphi = \frac{b}{c} \Rightarrow \varphi = \arccos\left(\frac{b}{c}\right)$$

$$\tan\varphi = \frac{a}{b} \Rightarrow \varphi = \arctan\left(\frac{a}{b}\right)$$

7.1.2 Aufgaben aus der Optik

Brechung von Licht

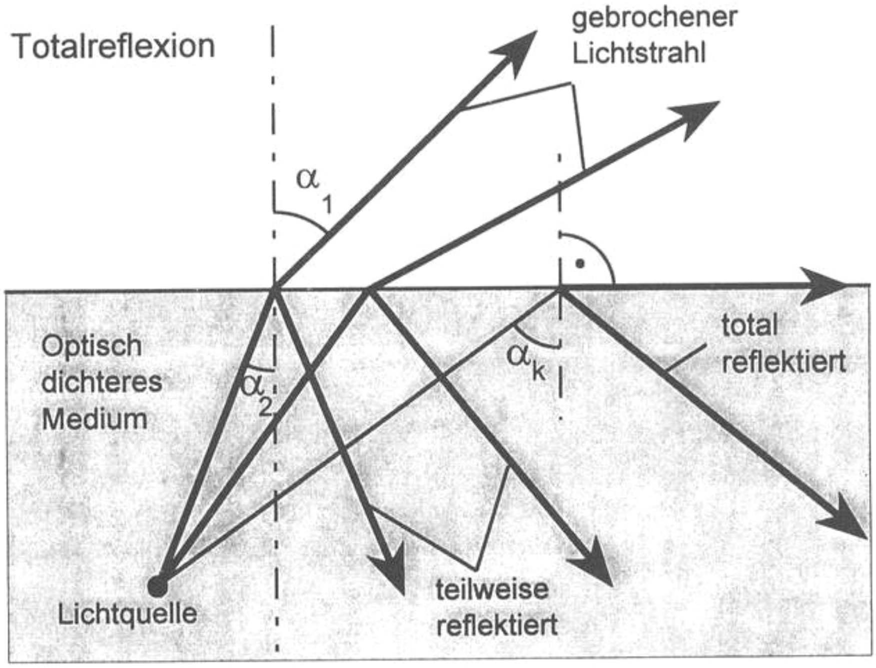


Brechungsgesetz von Snellius

$$n_1 \cdot \sin\varphi_1 = n_2 \cdot \sin\varphi_2$$

n : Brechzahl

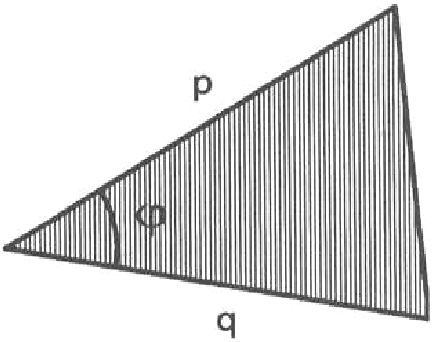
Totalreflexion



Totalreflexion:

Kritischer Einfallswinkel wenn Brechungswinkel 90° erreicht

7.1.3 Flächeninhalte eines Dreiecks

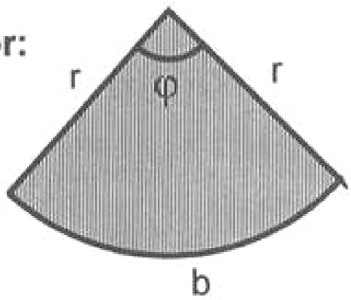


In jedem Dreieck gilt:

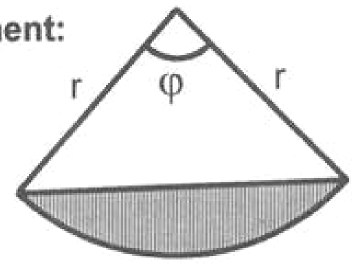
$$A = \frac{1}{2} \cdot p \cdot q \cdot \sin\varphi$$

7.1.4 Berechnungen am Kreis

Sektor:



Segment:



$$A = \pi \cdot r^2 \cdot \frac{\varphi}{360^\circ}$$

$$A = \frac{1}{2} b r$$

$$A = \frac{1}{2} \overset{\frown}{\varphi}\ r^2$$

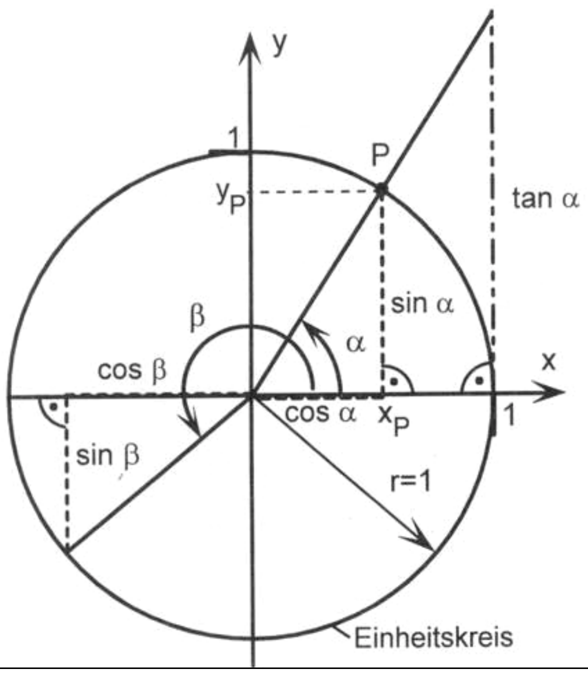
$$A = \left(\frac{\pi \cdot \varphi}{360^\circ} - \frac{\sin\varphi}{2}\right) r^2$$

$$0^\circ < \varphi < 360^\circ$$

$$A = \frac{1}{2}\left(\overset{\frown}{\varphi} - \sin\overset{\frown}{\varphi}\right) r^2$$

7.2 *Das allgemeine Dreieck*

7.2.1 Definition der Winkelfunktionen für beliebige Winkel



Definition:

$\sin\alpha = y_P$

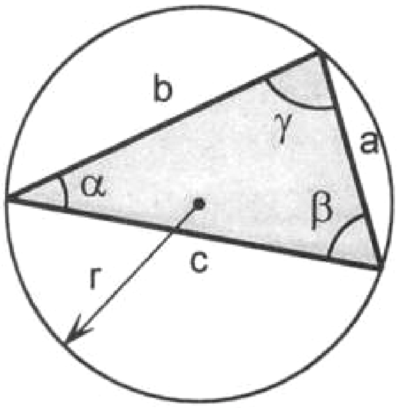
$\cos\alpha = x_P$

$\tan\alpha = \frac{y_P}{x_P} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

$(x_P \neq 0)$

7.2.2 Der Sinussatz

Sinussatz:

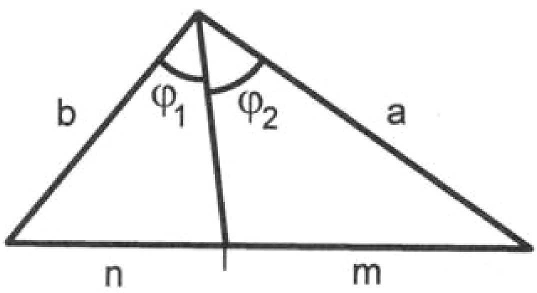


In jedem Dreieck ABC gilt:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2r$$

$$a : b : c = \sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma$$

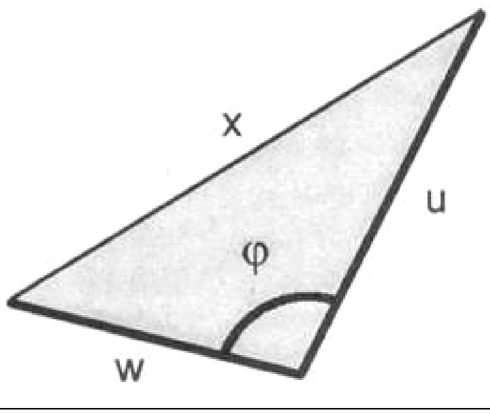
Winkelhalbierende im Dreieck:



$$\varphi_1 = \varphi_2 \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{m}{n}$$

7.2.3 Der Cosinussatz

Cosinussatz:



In jedem Dreieck gilt:

$$x^2 = u^2 + w^2 - 2uw\cos\varphi$$

φ ist Gegenwinkel von x.

7.3 *Goniometrie*

7.3.1 Beziehungen zwischen sin α, cos α und tan α

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \qquad \tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

$$\sin(\alpha) = \sqrt{1-\cos^2(a)}$$

7.3.2 Additionstheoreme

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cdot\cos\beta + \cos\alpha\cdot\sin\beta$$
$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cdot\cos\beta - \cos\alpha\cdot\sin\beta$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta - \sin\alpha\cdot\sin\beta$$
$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta + \sin\alpha\cdot\sin\beta$$

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\cdot\tan\beta}$$
$$\tan(\alpha-\beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\cdot\tan\beta}$$

7.3.3 Funktionen des doppelten Winkels

$$\sin(2\alpha) = 2\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha$$

$$\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - 2\cdot\sin^2\alpha = 2\cdot\cos^2\alpha - 1$$

$$\tan(2\alpha) = \frac{2\cdot\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha}$$

7.3.4 Goniometrie Übersicht

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \quad ; \quad \tan\alpha = \frac{1}{\cot\alpha} \quad ; \quad \cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

$$\tan\alpha \cdot \cot\alpha = 1 \quad ; \quad \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

$$\sin\alpha = \cos(\alpha - 90°) \quad ; \quad \cos\alpha = \sin(\alpha + 90°)$$

$$\sin\alpha = \cos(90° - \alpha) \quad ; \quad \cos\alpha = \sin(90° - \alpha)$$

Umrechnungstabelle:

$$\sin\varphi = \sqrt{1-\cos^2\varphi} = \frac{\tan\varphi}{\sqrt{1+\tan^2\varphi}} = \frac{1}{\sqrt{1+\cot^2\varphi}}$$

$$\cos\varphi = \sqrt{1-\sin^2\varphi} = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\varphi}} = \frac{\cot\varphi}{\sqrt{1+\cot^2\varphi}}$$

$$\tan\varphi = \frac{\sin\varphi}{\sqrt{1-\sin^2\varphi}} = \frac{\sqrt{1-\cos^2\varphi}}{\cos\varphi} = \frac{1}{\cot\varphi}$$

$$\cot\varphi = \frac{\sqrt{1-\sin^2\varphi}}{\sin\varphi} = \frac{\cos\varphi}{\sqrt{1-\cos^2\varphi}} = \frac{1}{\tan\varphi}$$

Additionstheoreme:

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cdot\cos\beta + \cos\alpha\cdot\sin\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta - \sin\alpha\cdot\sin\beta$$
$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1-\tan\alpha\cdot\tan\beta}$$
$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cdot\cos\beta - \cos\alpha\cdot\sin\beta$$
$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta + \sin\alpha\cdot\sin\beta$$
$$\tan(\alpha-\beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1+\tan\alpha\cdot\tan\beta}$$

Funktionen des doppelten Winkels:

$$\sin 2\alpha = 2\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha$$
$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$
$$\tan 2\alpha = \frac{2\cdot\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$$

Funktionen des halben Winkels:

$$\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}\cdot(1-\cos\alpha)$$
$$\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}\cdot(1+\cos\alpha)$$
$$\tan^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}$$

7.4 *Trigonometrie II*

<u>sin</u>

$\sin(180^\circ - \alpha) = \sin(\alpha)$ für $0^\circ \le \alpha < 90^\circ$

$\sin(180^\circ + \alpha) = -\sin(\alpha)$ für $0^\circ < \alpha \le 180^\circ$

<u>cos</u>

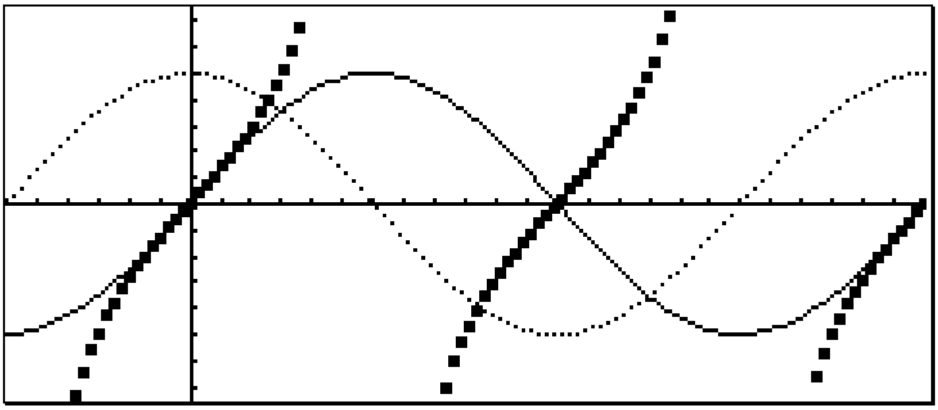
$\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos(\alpha)$ für $0^\circ \le \alpha < 90^\circ$

$\cos(180^\circ + \alpha) = -\cos(\alpha)$ für $0^\circ < \alpha \le 180^\circ$

<u>tan</u>

$\tan(90^\circ + \alpha) = -\tan(90^\circ - \alpha)$ für $0^\circ < \alpha \le 90^\circ$

$\tan(180^\circ + \alpha) = \tan$ für $\alpha \in]0^\circ;180^\circ] \setminus \{90^\circ\}$



sin(x) : Intervall = 360°
sin(2x) : Intervall = 180°
sin(3x) : Intervall = 120°

L = {... ; x - Intervall ; x ; x + Intervall ; x + 2 · Intervall ; ....}
(je nach Grundmenge)

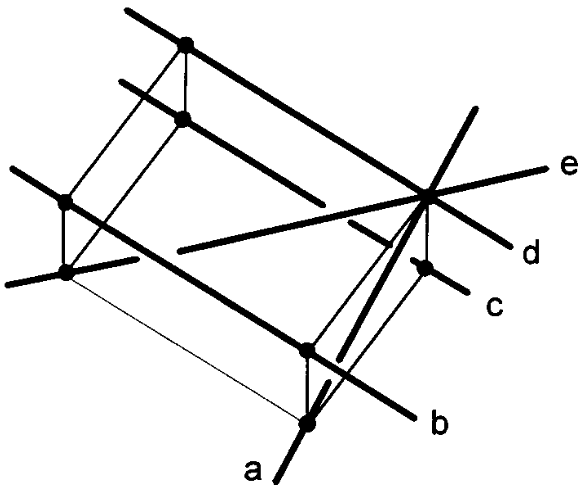
8 Stereometrie

8.1 *Beziehungen im Raum*

8.1.1 **Lage von Punkten, Geraden und Ebenen im Raum**

Symbole: Punkte: A, B, C, ... Geraden: a, b, c, ...
Ebenen: ε_1 , ε_2 , ε_3 , ... , ε (ABC)

Gegenseitige Lage von Geraden:



sich schneidende Geraden:
a und e
a und d

parallele Geraden:
b, c und d

windschiefe Geraden:
a und b , a und c
e und b , e und c

Die Ebene

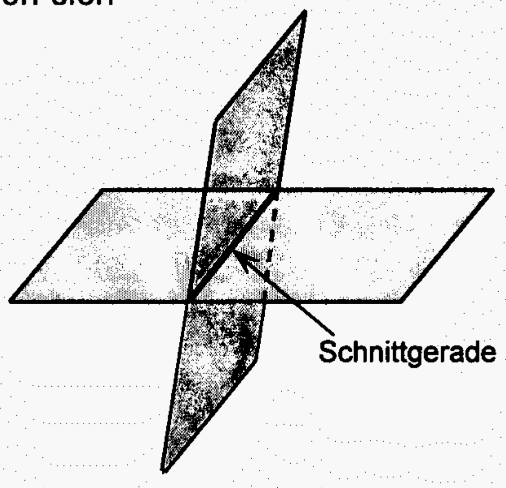
Eine Ebene ist eindeutig festgelegt durch:

3 Punkte A, B, C	1 Punkt A und 1 Gerade g	2 sich schneidende Geraden	2 parallele Geraden

Gegenseitige Lage von Ebenen:

Zwei Ebenen

schneiden sich



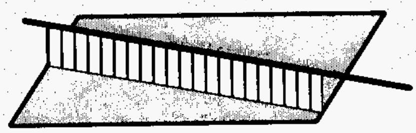
sind parallel

Gegenseitige Lage von Gerade und Ebene:

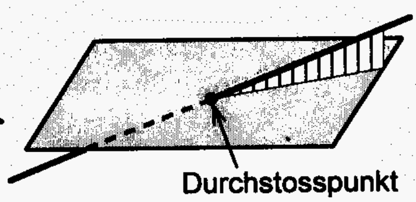
Die Gerade

liegt in der Ebene

ist parallel zur Ebene

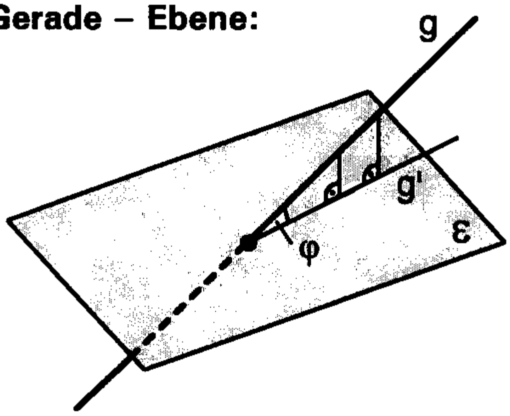


durchstösst die Ebene



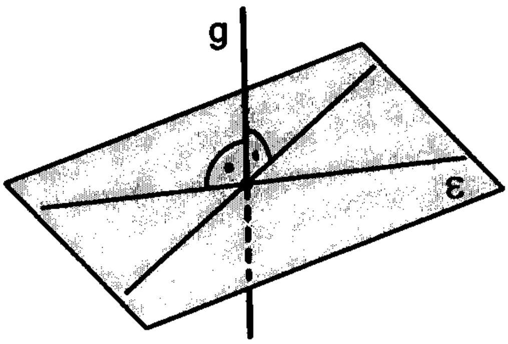
8.1.2 **Winkel im Raum**

Gerade – Ebene:



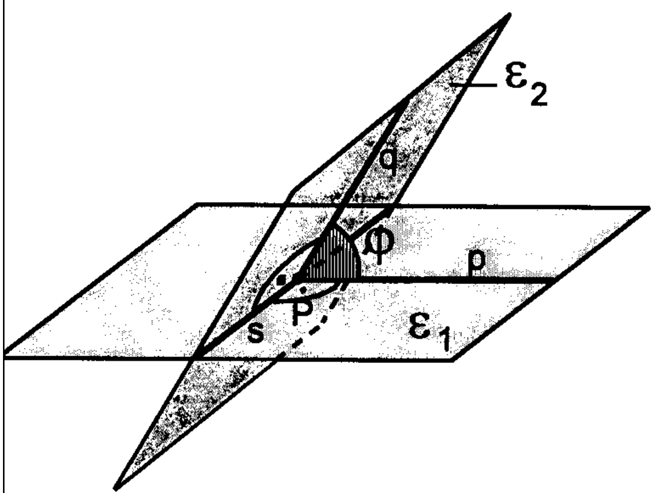
Der Winkel φ zwischen einer Geraden g und einer Ebene ε ist der Winkel zwischen der Gerade g und ihrer senkrechten Projektion g' in der Ebene ε.

Spezialfall: Lot



Eine Gerade g heisst Lot einer Ebene ε, wenn es in ε mindestens zwei Geraden gibt, die zu g senkrecht stehen.
Die Ebene ε ist die Normalebene zu g.

Ebene – Ebene:



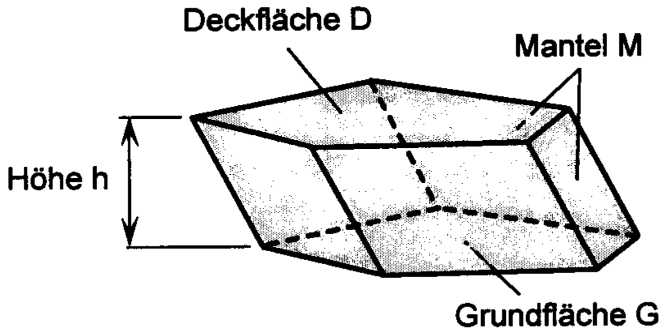
Der Winkel φ ($\varphi < 90°$) zwischen den Ebenen ε_1 und ε_2 ist wie folgt definiert:

Errichtet man in einem beliebigen Punkt P der Schnittgeraden s je eine Senkrechte p und q zu s in beiden Ebenen, so bilden diese Geraden den Winkel φ.

Spezialfall: Normalebene
Ist $\varphi = 90°$ stehen die beiden Ebenen normal zueinander.

8.1.3 Das Prisma

n-seitiges Prisma:



5-seitiges Prisma

Jeder geometrische Körper, der begrenzt wird von

zwei kongruenten und parallelen n-Ecken (Grund- und Deckfläche)

und

n Parallelogrammen (Mantel)

heisst n-seitiges Prisma.

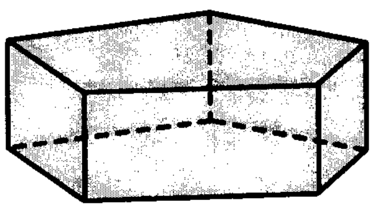
Die Oberfläche S: $\boxed{S = M + G + D}$

M: Mantelfläche (Summe aller Seitenflächen)
G: Grundfläche
D: Deckfläche $D = G$

Das Volumen V: $\boxed{V = G \cdot h}$

h: Höhe (Abstand von Grund- und Deckfläche)

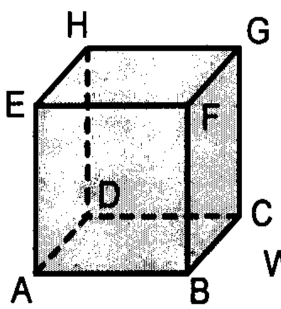
Gerades Prisma:



Ein Körper heisst gerades Prisma, wenn der Mantel ausschliesslich aus Rechtecken besteht.

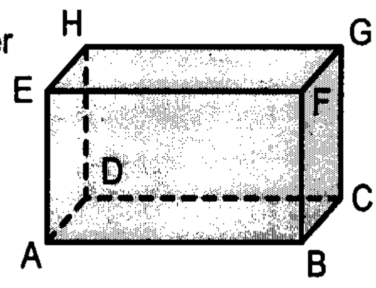
Sonderfälle des geraden Prismas:

Reguläres Prisma:	Die Grundfläche ist ein reguläres Vieleck.
Quader:	Die Grundfläche ist ein Rechteck.
Würfel:	Quader mit lauter gleich langen Kanten.



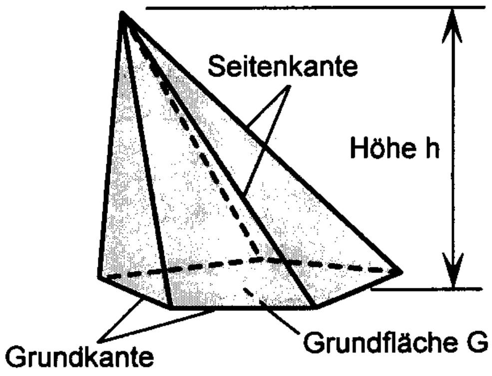
Würfel

Quader



8.1.4 Pyramide und Pyramidenstumpf

n-seitige Pyramide:



5-seitige Pyramide

Eine n-seitige Pyramide ist ein geometrischer Körper, der begrenzt wird von einem Vieleck (n-Eck) und von n Dreiecken (Seitenflächen), die einen Eckpunkt (Spitze) gemeinsam haben.

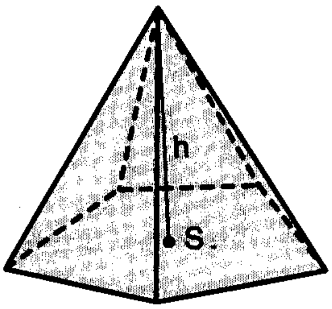
Die Oberfläche S: $\boxed{S = M + G}$

M: Mantelfläche (Summe aller Seitenflächen)
G: Grundfläche

Das Volumen V: $\boxed{V = \frac{1}{3} G \cdot h}$

h: Abstand der Spitze S von der Grundfläche G

Gerade Pyramide:

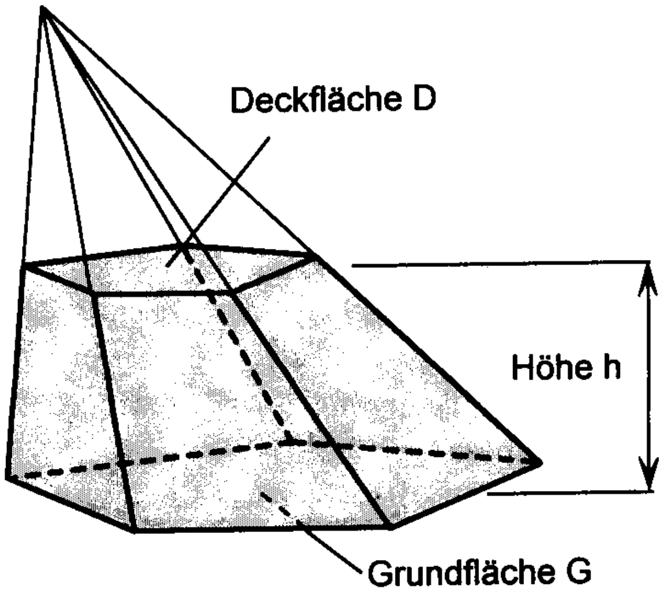


Bei der geraden Pyramide fällt der Fusspunkt der Höhe h mit dem Schwerpunkt S der Grundfläche zusammen.[1]

Reguläre Pyramide:	Die Grundfläche ist ein reguläres Vieleck.
Tetraeder:	Die Grundfläche ist ein Dreieck.
Reguläres Tetraeder:	Vier gleichseitige Dreiecke als Begrenzungsflächen.

n-seitiger Pyramidenstumpf:

Pyramidenstumpf nennt man jeden geometrischen Körper, der entsteht, wenn eine Pyramide durch eine zur Grundfläche parallele Ebene geschnitten wird. Damit erhält man einen Pyramidenstumpf und eine Ergänzungspyramide.

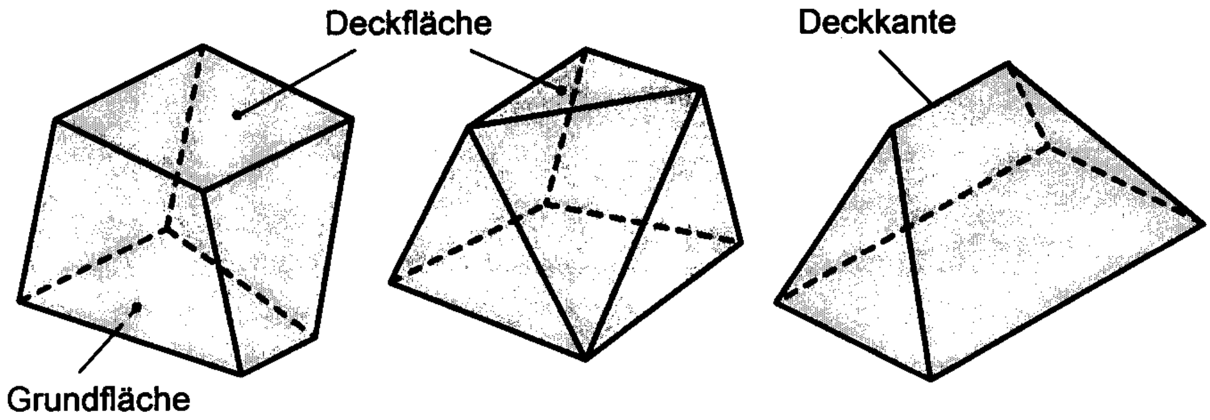


5-seitiger Pyramidenstumpf

Ein Pyramidenstumpf wird von zwei zueinander parallelen und ähnlichen aber nicht kongruenten n-Ecken sowie n Trapezen begrenzt.

Volumen: $$V = \frac{1}{3} h \left(G + \sqrt{GD} + D \right)$$

8.1.5 Prismatoide



Ein **Prismatoid** (Prismoid) ist ein Polyeder mit der folgenden Oberfläche:

Grund- und *Deckfläche* sind parallele Vielecke; die Eckenzahl kann verschieden sein.

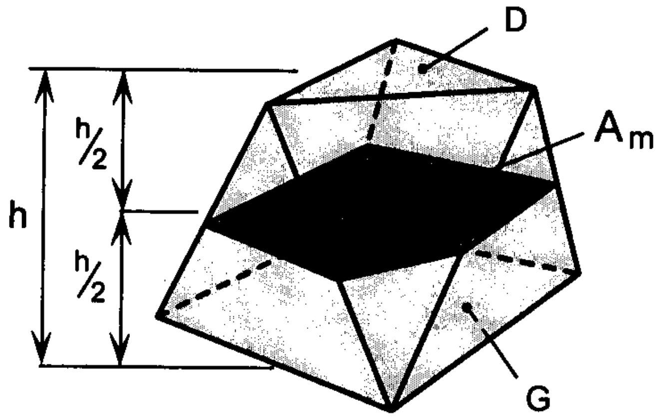
Die Deckfläche darf zu einer Strecke (Deckkante) oder einem Punkt entartet sein.

Der *Mantel* besteht aus Dreiecken, Trapezen oder Parallelogrammen.

Sonderfälle des Prismatoids: Prisma, Pyramide und Pyramidenstumpf

Bei einem **senkrechten** Prismatoid liegen die Schwerpunkte der Grund- und Deckfläche senkrecht übereinander.

Das Volumen eines Prismatoids:

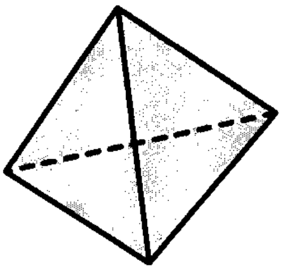


$$V = \frac{h}{6}(G + D + 4A_m)$$

h: Höhe (Abstand zwischen Grund- und Deckfläche)
G: Grundfläche
D: Deckfläche (besteht diese aus einer Strecke oder einem Punkt, so ist $D = 0$ einzusetzen.)
A_m: Mittelschnittfläche (Schnittfläche in halber Höhe und parallel zur Grundfläche). Die Mittelschnittebene halbiert alle Seitenkanten.

8.1.6 Reguläre Polyeder (Platonische Körper)

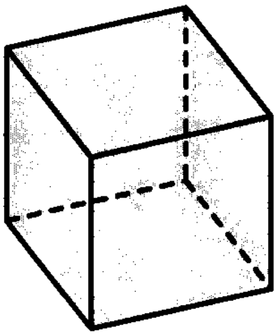
Ein Polyeder heisst **regulär** oder **Platonischer Körper**, wenn er von kongruenten regulären Vielecken begrenzt wird und wenn in jeder Ecke gleich viele Kanten zusammenstossen.



reguläres Tetraeder:

Feuer

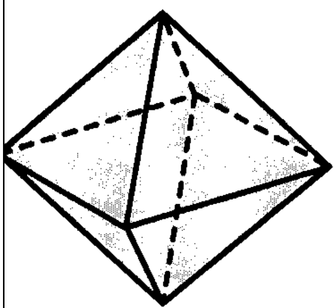
Wie der Würfel breit und lastend
im Bereich der Schwere ruht,
strebt empor das Tetraeder
wie die Flamme aus der Glut,
schwingt bewegt sich in die Weite,
nach der Höhe in die Breite,
und der Kanten strenges Streben
ist erfüllt von Kraft und Leben.



Würfel (Hexaeder):

Erde

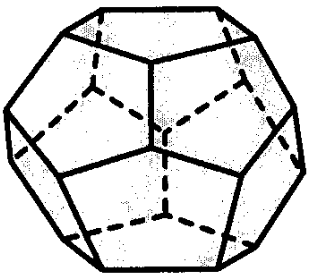
Gleicher Höhe, Länge, Breite,
rechtgewinkelt jede Seite,
zeigt des Würfels klare Form
klares Mass und klare Norm.
Weit entfernt vom Raum der Kugel,
die dem Himmel zu vergleichen,
sind des Würfels Kanten, Ecken
ganz und gar ein irdisch Zeichen.



Oktaeder:

Luft

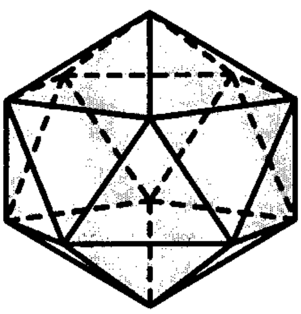
Oktaeder, schwebst im Raume
schwerelos fast wie im Traume,
ragst du ruhend im Gefilde
als kristallenes Gebilde.
Strebst hinaus nach allen Seiten,
in die Höhe, in die Weiten,
bist verwandt dem Element,
welches keine Schwere kennt
und als Atem allem Leben
seine Kraft vermag zu geben.



Dodekaeder:

Himmelsmaterie

Pentagondodekaeder,
lass im Raum, den du umschlossen,
tastend uns herum bewegen,
lass die Flächen deiner Hülle,
ihre Kanten, ihre Ecken
denkend in den Raum uns wandeln,
der zur Kugel weit sich rundet
und uns jene Kraft bekundet,
die im Anfang alles war
und in allem sein wird immerdar.



Ikosaeder:

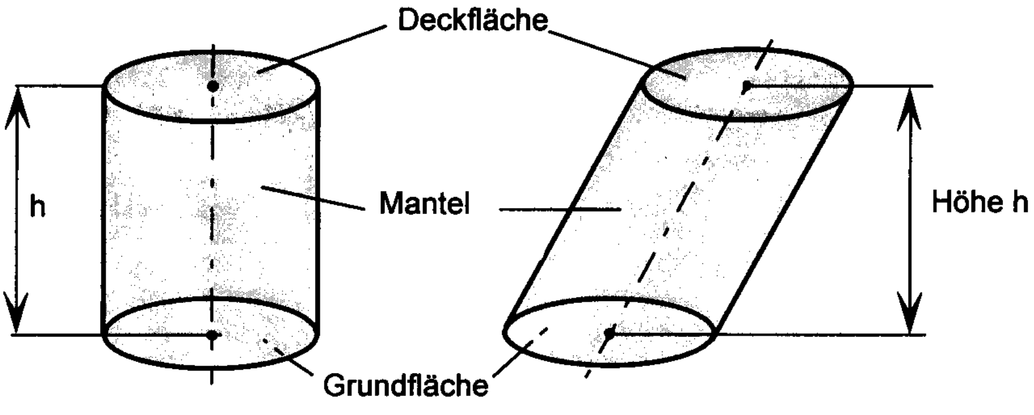
Wasser

Wenn sich im Ikosaeder
zwanzig Flächen still berühren,
als würden sie die Kugel spüren,
fühlen wir die Kräfte walten,
die im Wasser sich entfalten,
wenn es sich zu Schnee verdichtet
und zur Sternenform sich lichtet.

8.2 *Krummflächig begrenzte Körper*

8.2.1 Der Kreiszylinder

Kreiszylinder:



gerader Kreiszylinder   schiefer Kreiszylinder

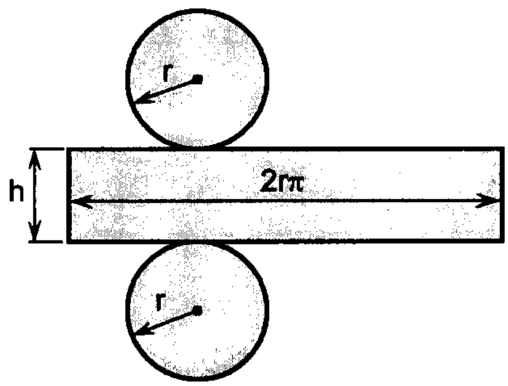
Verschiebt man eine Kreisfläche parallel um eine bestimmte Strecke, so entsteht ein Kreiszylinder.

Mantellinie: Verbindungsstrecke zweier entsprechender Punkte der beiden Kreislinien. Sie ist immer parallel zur Körperachse.

Volumen V: $\boxed{V = G \cdot h = \pi r^2 h}$

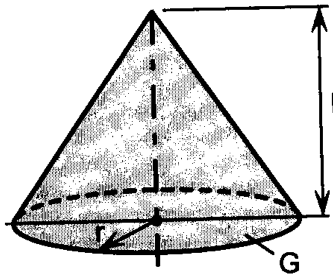
Gerader Kreiszylinder: Verschiebung senkrecht zur Kreisfläche, d.h. die Achse steht senkrecht zur Grund- und zur Deckfläche.

Oberfläche S: $\boxed{S = G + D + M = 2\pi r^2 + 2\pi rh = 2\pi r(r+h)}$

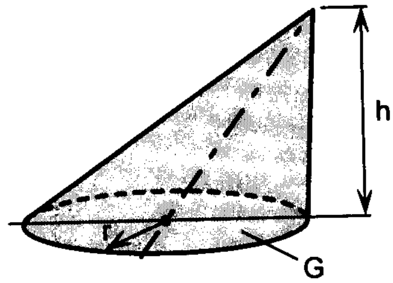


8.2.2 Kreiskegel und Kreiskegelstumpf

Verbindet man alle Punkte einer Kreislinie mit einem Punkt, der ausserhalb der Kreisebene liegt, durch Strecken, so entsteht ein **Kreiskegel.**
(im Folgenden Kegel genannt)



gerader Kegel

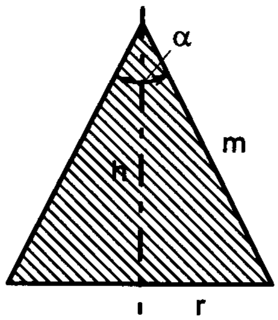


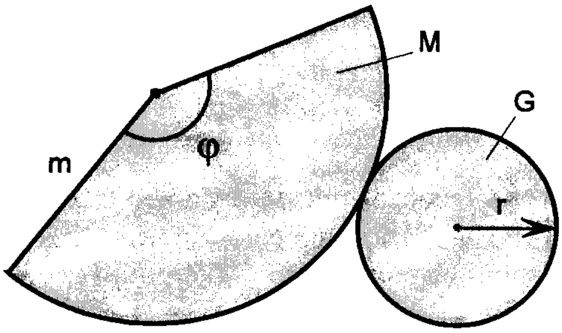
schiefer Kegel

Volumen:

$$\boxed{V = \frac{1}{3} G h = \frac{\pi}{3} r^2 h}$$

Gerader Kreiskegel





$m^2 = r^2 + h^2$

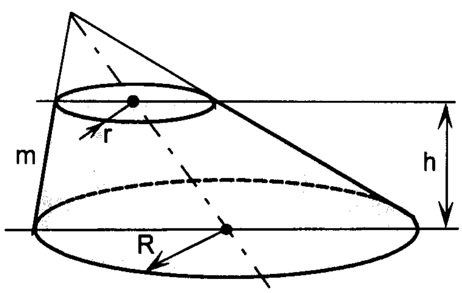
Mantelfläche: $M = 2\pi r m$

Oberfläche: $S = \pi r\,(r + m)$

$$\frac{\varphi}{360^\circ} = \frac{r}{m}$$

m: Mantellinie
α: Öffnungswinkel
φ: Zentriwinkel des abgewickelten Mantels

Kegelstumpf nennt man jeden geometrischen Körper, der entsteht, wenn ein Kreiskegel durch eine zur Grundfläche parallele Ebene geschnitten wird.
Damit erhält man einen Kegelstumpf und einen Ergänzungskegel.

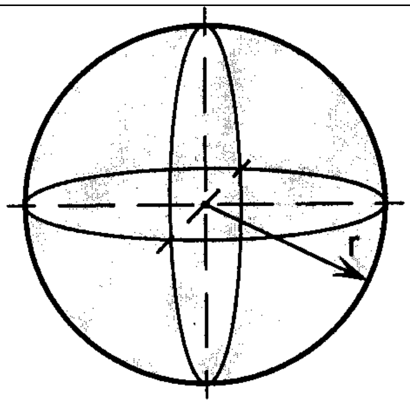


Volumen: $\boxed{V = \frac{\pi}{3} h \left(r^2 + R^2 + Rr\right)}$

Der gerade Kegelstumpf:

Mantelfläche: $\boxed{M = \pi m\,(r + R)}$

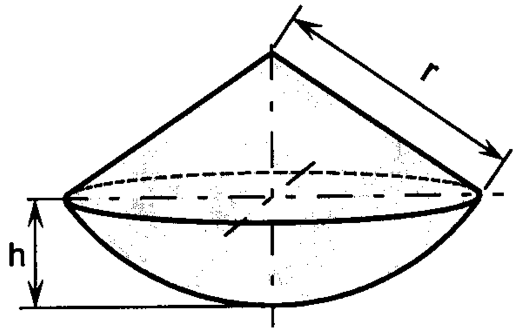
8.2.3 Kugel und Kugelteile



Kugel:

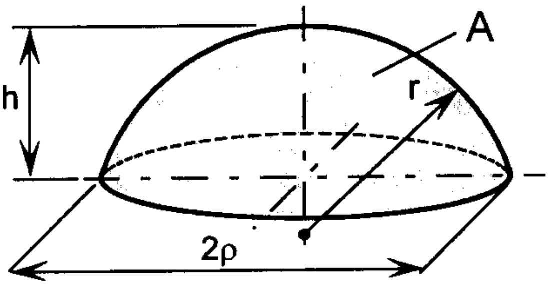
Volumen: $V = \frac{4\pi}{3} r^3$

Oberfläche: $S = 4\pi r^2$



Kugelsektor:

Volumen: $V = \frac{2\pi}{3} r^2 h$

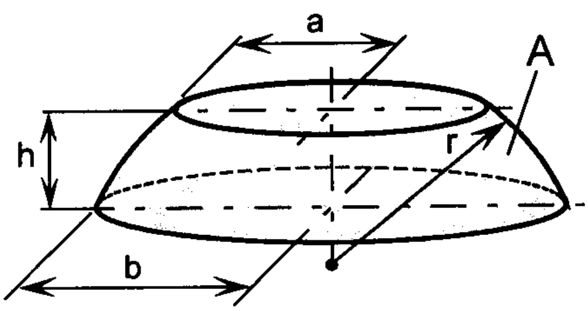


Kugelsegment:

Volumen: $V = \frac{\pi}{3} h^2 (3r - h) = \frac{\pi}{6} h \left(3\rho^2 + h^2\right)$

Oberfläche: $S = A + \pi \rho^2$

Kugelhaube: $A = 2\pi r h$
(Kalotte)



Kugelschicht:

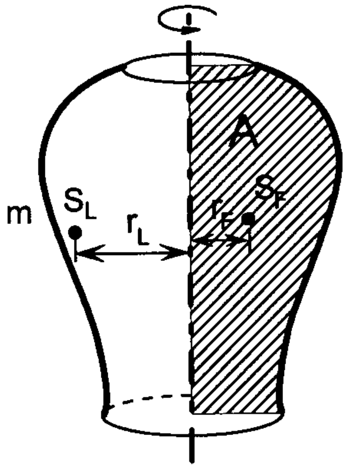
Volumen: $V = \frac{\pi}{6} h \left(3a^2 + 3b^2 + h^2\right)$

Oberfläche: $S = A + \pi \left(a^2 + b^2\right)$

Kugelzone: $A = 2\pi r h$

8.2.4 Rotationskörper

Guldinsche Regeln



Meridian: Erzeugende ebene Kurve
S_F: Schwerpunkt der Meridianfläche
A: Inhalt der Meridianfläche
S_L: Schwerpunkt der Meridianlinie
m: Länge der Meridianlinie

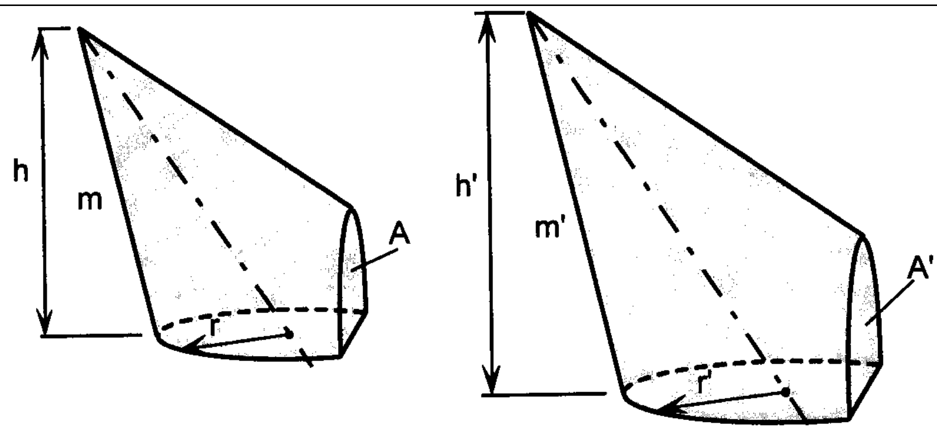
Das **Volumen** eines Rotationskörpers ist gleich dem Produkt aus dem Flächeninhalt A der den Körper erzeugenden Fläche und dem Weg, den ihr Schwerpunkt bei einer Umdrehung um die Rotationsachse zurücklegt.

$$V = 2\pi \cdot r_F \cdot A$$

Der **Mantel** eines Rotationskörpers ist gleich dem Produkt aus der Länge der den Körper erzeugenden Kurve und dem Weg, den ihr Schwerpunkt bei einer Umdrehung um die Rotationsachse zurücklegt.

$$M = 2\pi \cdot r_L \cdot m$$

8.3 *Ähnliche Körper*



Für ähnliche Körper mit dem Streckungsfaktor k gilt:

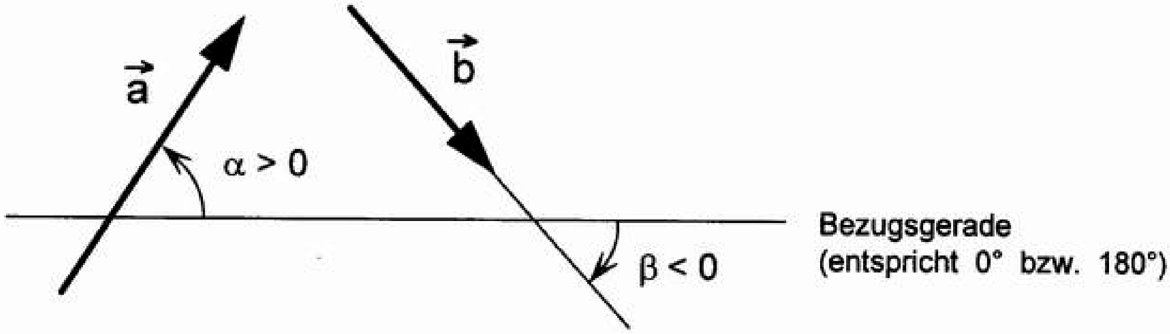
Längen: $k = \frac{h'}{h} = \frac{r'}{r} = \frac{m'}{m} = \ldots\ldots$

Flächeninhalte: $k^2 = \frac{G'}{G} = \frac{M'}{M} = \frac{A'}{A} = \frac{S'}{S} = \ldots\ldots$

Volumen: $k^3 = \frac{V'}{V}$

9 Vektorgeometrie

9.1 *Vektoren in Polarform*



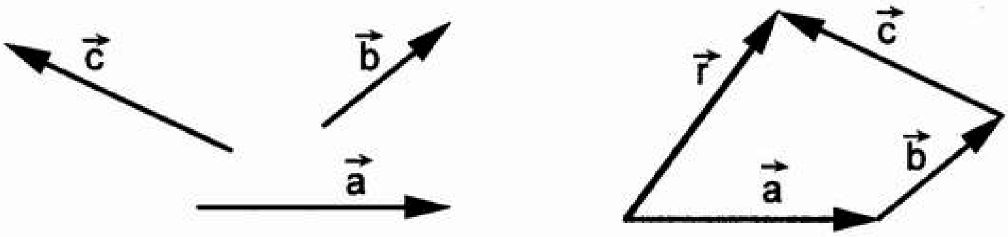
$$\boxed{\vec{a} = (a/\alpha) \qquad \text{Vektor} = (\text{Betrag/Winkel})}$$

Betrag von $\vec{a}$: $|\vec{a}| = a$ Der Betrag von $\vec{a}$ entspricht der Pfeillänge.

Gleichheit von Vektoren:
Zwei Vektoren sind gleich, wenn sie in Betrag **und** Richtung übereinstimmen.

9.2 *Elementare Vektoroperationen*

Addition:



Der Vektor $\vec{r}$ heisst die Summe oder **Resultierende** von $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$:

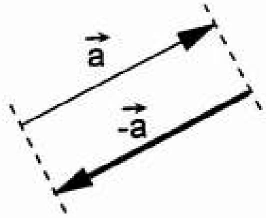
$$\boxed{\vec{r} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}}$$

Die Resultierende erhält man durch den Pfeil vom Anfangspunkt des ersten bis zum Endpunkt des letzten, angesetzten Pfeiles.

Rechengesetze: $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ (Kommutativgesetz)

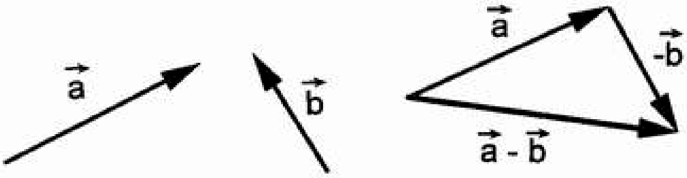
$\vec{a} + \left(\vec{b} + \vec{c}\right) = \left(\vec{a} + \vec{b}\right) + \vec{c}$ (Assoziativgesetz)

Subtraktion:



Unter dem **Gegenvektor** $\left(-\vec{a}\right)$ von $\vec{a}$ versteht man jenen Vektor, der denselben Betrag, aber die entgegengesetzte Richtung wie $\vec{a}$ hat.

Der Gegenvektor einer Verschiebung $\overrightarrow{AB}$ ist $-\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$.



$$\boxed{\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + \left(-\vec{b}\right)}$$

Rechengesetze: $\vec{a} - \vec{a} = \vec{0}$ (Nullvektor)

$$\left|\vec{a} - \vec{b}\right| = \left|\vec{b} - \vec{a}\right|$$

Multiplikation "Skalar mal Vektor"

$$\boxed{k \cdot \vec{a} = \vec{b}}$$

Betrag: $\left|\vec{b}\right| = \left|k \cdot \vec{a}\right| = |k| \cdot \left|\vec{a}\right|$, $k \in R$

Richtung: $k > 0$: $k \cdot \vec{a}$ und $\vec{a}$ haben dieselbe Richtung.
$k < 0$: $k \cdot \vec{a}$ und $\vec{a}$ sind entgegengesetzt gerichtet.

Sonderfälle: $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$; $(-1) \cdot \vec{a} = -\vec{a}$; $0 \cdot \vec{a} = \vec{0}$

Rechengesetze:

$$m \cdot \left(\vec{a} + \vec{b}\right) = m \cdot \vec{a} + m \cdot \vec{b}$$

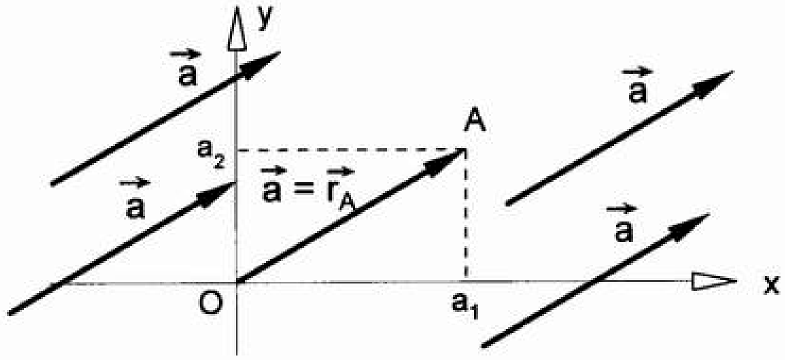
$$(m + n) \cdot \vec{a} = m \cdot \vec{a} + n \cdot \vec{a} \qquad m, n \in R$$

$$m\left(n \cdot \vec{a}\right) = (m \cdot n) \cdot \vec{a}$$

$$\frac{\vec{a}}{m} = \frac{1}{m} \cdot \vec{a}$$

Kollineare Vektoren: Vektoren, die parallel oder antiparallel sind.
$\vec{a}$ und $\vec{b}$ sind kollinear $\Leftrightarrow$ $\vec{a} = k \cdot \vec{b}$, $k \in R \wedge k \neq 0$

9.3 *Vektoren in Komponentendarstellung*



Die Menge aller Pfeile mit derselben Länge und derselben Richtung bildet einen Vektor. Ein einzelner Pfeil heisst **Repräsentant** (Vertreter) des Vektors.

Ortsvektor eines Punktes A:

Repräsentant, der vom Koordinatenursprung O ausgeht. Symbole: $\overrightarrow{OA}$ oder $\vec{r}_A$

Komponentendarstellung eines Vektors:

$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$; Die Zahlen a_1 und a_2 heissen Koordinaten oder Komponenten des Vektors $\vec{a}$

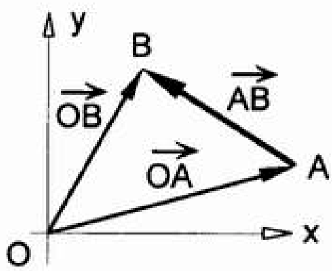
Rechengesetze:

$$\vec{a} \pm \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \pm b_1 \\ a_2 \pm b_2 \end{pmatrix}$$

$$k \cdot \vec{a} = k \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \cdot a_1 \\ k \cdot a_2 \end{pmatrix}, \quad k \in R$$

$$|\vec{a}| = \left| \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$

Vektor aus Anfangs- und Endpunkt:



Für zwei beliebige Punkte A (a_1/a_2) und B (b_1/b_2) gilt:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = -\vec{r}_A + \vec{r}_B = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \end{pmatrix}$$

9.3.1 Dreidimensionale Vektoren

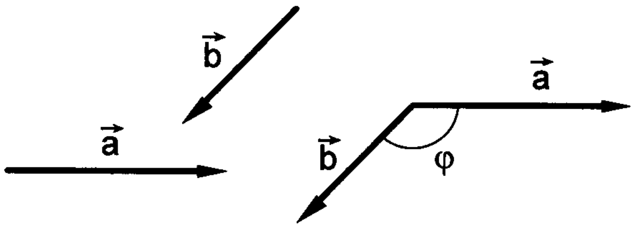
Rechengesetze:

$$\vec{a} \pm \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \pm b_1 \\ a_2 \pm b_2 \\ a_3 \pm b_3 \end{pmatrix}$$

$$k \cdot \vec{a} = k \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \cdot a_1 \\ k \cdot a_2 \\ k \cdot a_3 \end{pmatrix}, \quad k \in R$$

$$\left|\vec{a}\right| = \left|\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

9.4 *Das Skalarprodukt*



Winkel zwischen zwei Vektoren:

$$\varphi = \angle\left(\vec{a}, \vec{b}\right); \quad 0° \le \varphi \le 180°$$

Skalarprodukt: $\boxed{\vec{a} \cdot \vec{b} = \left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot \cos\varphi}$

Das Skalarprodukt von zwei Vektoren ist eine <u>reelle Zahl</u>, kein Vektor.

In Komponentendarstellung:

$$\boxed{\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}$$

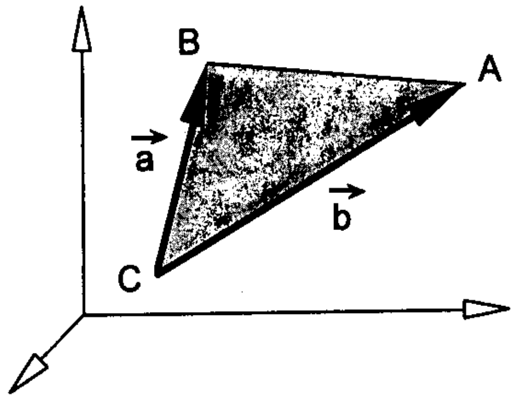
Gesetze:

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = \left(\vec{a}\right)^2 = \left|\vec{a}\right|^2$$
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$$
$$\vec{a} \cdot \left(\vec{b} + \vec{c}\right) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$$
$$\left(m \cdot \vec{a}\right) \cdot \left(n \cdot \vec{b}\right) = mn\left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right), \quad m, n \in R$$

Zwei vom Nullvektor verschiedene Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ sind genau dann <u>orthogonal</u>, wenn ihr Skalarprodukt Null ergibt:

$$\vec{a} \perp \vec{b} \text{ und } \vec{a} \neq \vec{0} \text{ und } \vec{b} \neq \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$



$$A_{ABC} = \frac{1}{2}\sqrt{\left|\vec{a}\right|^2 \cdot \left|\vec{b}\right|^2 - \left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)^2}$$

9.5 *Das Skalarprodukt II*

Das Skalarprodukt von zwei Vektoren ist eine **reelle Zahl**, kein Vektor.

$$\boxed{\vec{a} * \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\alpha)}$$

Das Skalarprodukt von zwei aufeinander rechtwinkligen Vektoren ist 0.

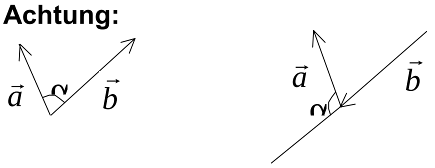
In Komponentendarstellung:

$$\vec{a} * \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

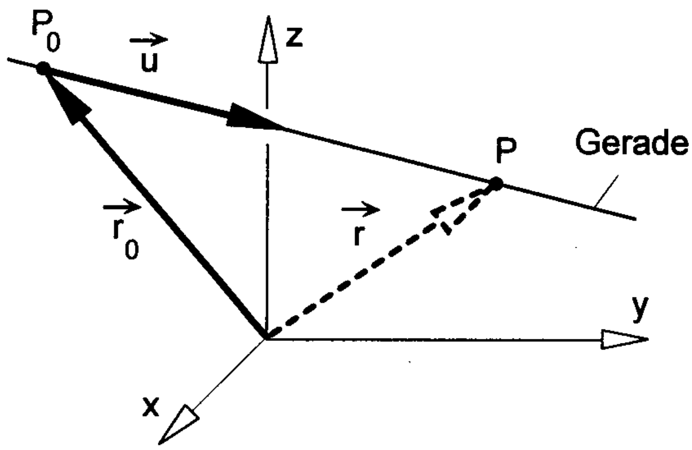
Nach cos(α) umgeformt:

$$\cos(\alpha) = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{\vec{a} * \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

Achtung:



9.6 *Die Gerade*



Parametergleichung einer Geraden:

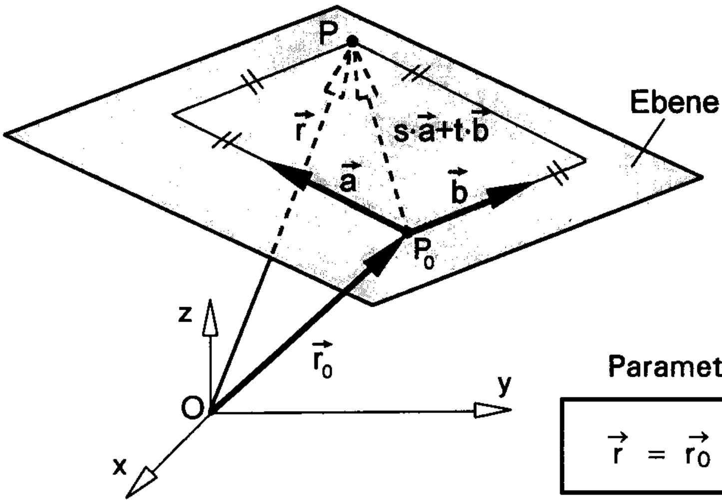
$$\boxed{\vec{r} = \vec{r}_0 + t \cdot \vec{u} \quad \text{mit} \quad t \in R}$$

t: Parameter
$\vec{u}$: Richtungsvektor
$\vec{r}_0$: Ortsvektor des Ausgangspunktes P_0
$\vec{r}$: Ortsvektor eines beliebigen Punktes P der Geraden

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + t \cdot \vec{u} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = x_0 + t \cdot u_1 \\ y = y_0 + t \cdot u_2 \\ z = z_0 + t \cdot u_3 \end{cases}$$

9.7 *Die Ebene*

9.7.1 Die Parameterdarstellung einer Ebene



Parametergleichung einer Ebene:

$$\boxed{\vec{r} = \vec{r}_0 + s\cdot\vec{a} + t\cdot\vec{b} \quad \text{mit} \quad s,t \in R}$$

s, t : Parameter
$\vec{a}, \vec{b}$: Richtungsvektoren (spannen die Ebene auf)
$\vec{a}$ und $\vec{b}$ dürfen nicht kollinear sein.
$\vec{r}_0$: Ortsvektor des Ausgangspunktes P_0.
$\vec{r}$: Ortsvektor eines beliebigen Punktes P der Ebene.

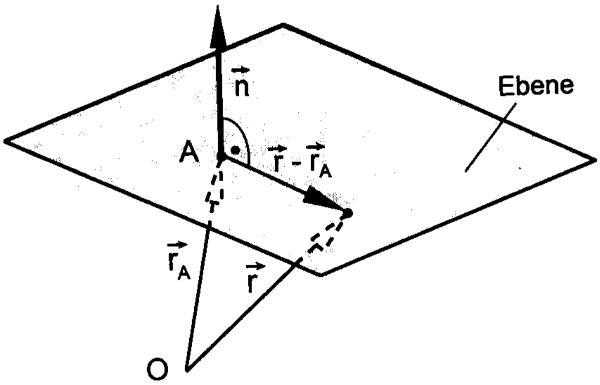
Komponentengleichungen:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_0 + s\cdot a_1 + t\cdot b_1 \\ y = y_0 + s\cdot a_2 + t\cdot b_2 \\ z = z_0 + s\cdot a_3 + t\cdot b_3 \end{cases}$$

9.7.2 Die Normalen einer Ebene

Der Vektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ ist ein Normalvektor der Ebene $ax + by + cz = d$.

$$ax + by + cz = d \quad \Leftrightarrow \quad \vec{n} \cdot \vec{r} = d \quad \text{mit} \quad \vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$



Ebene durch A und normal zu $\vec{n}$:

$$\vec{n} \cdot \left(\vec{r} - \vec{r}_A\right) = 0$$

Abstand q des Punktes P von der Ebene $\vec{n} \cdot \left(\vec{r} - \vec{r}_A\right) = 0$:

$$q = \frac{\left|\vec{n} \cdot \left(\vec{r}_P - \vec{r}_A\right)\right|}{\left|\vec{n}\right|}$$

9.8 *Berechnungen mit Gerade – Ebene und Ebene – Ebene*

9.8.1 **Koordinatengleichung umwandeln zu Parametergleichung**

$ax - by - cz =$ | auflösen nach x

$x = \frac{b}{a} y + \frac{c}{a} z + \frac{M}{a}$ | einsetzen in Parametergleichung

$$\vec{p} = \begin{pmatrix} M/a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} b/a \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} c/a \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

9.8.2 **Parametergleichung umwandeln zu Koordinatengleichung**

$\vec{r} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} g \\ h \\ i \end{pmatrix}$ | Matrix erstellen

$$\left|\begin{array}{cc:ccc:c} \mathrm{s} & \mathrm{t} & x & \mathrm{y} & \mathrm{z} & () \\ \hline d & g & 1 & 0 & 0 & a \\ e & h & 0 & 1 & 0 & b \\ f & i & 0 & 0 & 1 & c \end{array}\right|$$

| rref() uns interessiert die letzte Zeile

$$\begin{array}{cccccc} 0 & 0 & 1 & A & B & C \\ & & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 0 & 0 & 1x & +Ay & +Bz & =C \end{array}$$

| entspricht: $x + Ay + Bz = C$

9.8.3 **Untersuchung Ebene <-> Gerade**

$g : \vec{r} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix}$ $E : \vec{r} = \begin{pmatrix} g \\ h \\ i \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} j \\ k \\ l \end{pmatrix} + w \begin{pmatrix} m \\ n \\ o \end{pmatrix}$

gegenüberstellen!

$$\left|\begin{array}{ccccccccc} a & + & sd & = & g & + & vj & + & wm \\ b & + & se & = & h & + & vk & + & wn \\ c & + & sf & = & i & + & vl & + & wo \end{array}\right|$$

berechnen für (t,v,w)

Keine Lösung:
$g \parallel E$
h und E sind Parallel

Eine Lösung:
$g \cap E$ g schneidet E
Durchstosspunkt

$D = \begin{pmatrix} a+sd \\ b+se \\ c+sf \end{pmatrix}$ D= $\begin{pmatrix} g+vj+wm \\ h+vk+wn \\ i+vl+wo \end{pmatrix}$

Mehrere Lösungen:
$g \in E$
g ist auf E

9.8.4 Untersuchung Ebene <-> Ebene

Koordinatengleichung gegenüberstellen

- Fall 1: E1 = E2
  E1 ist gleich oder ein vielfaches von E2
  -> Die Ebenen sind IDENTISCH
- Fall 2: E1 || E2
  Die linke Seite von E1 ist gleich oder ein vielfaches von E2
  Auf die rechte Seite trifft das nicht zu!
  -> Ebenen sind PARALLEL

Fall 3: E1 $\cap$ E2
Die Gleichungen sind verschieden
-> Die Ebenen SCHNEIDEN sich!

gemeinsame Gerade muss mit einer Parametergleichung gesucht werden. z. B.

$$\begin{array}{c|ccccccc|l} E1 & ax & + & by & + & cz & = & d & |\ \text{Variable z eliminieren} \\ E2 & hx & + & iy & + & jz & = & k & |\ \text{(jz = minus n - fache von cz)} \\ \hline & nax+hx & + & nby+iy & & & = & nd+k & |\ \text{- > n * E1 + E2 addieren} \end{array}$$

| nach y auflösen

$$y = \frac{anx - hx}{bn + i} + \frac{dn + k}{bn + i} \qquad \text{| in E1 einsetzen}$$

$$ax + b\left(\frac{anx - hx}{bn+i} + \frac{dn+k}{bn+i}\right) + cz = d \qquad \text{| nach z auflösen}$$

$$z = \frac{bhx - aix}{bnc + ic} + \frac{di - bk}{bnc + ic} \qquad \text{| einsetzen (x=t)}$$

$$\left|\begin{array}{ccccc} x & = & & & 1t \\ y & = & \frac{dn+k}{bn+i} & + & \frac{ant-ht}{bn+i} \\ z & = & \frac{di-bk}{bnc+ic} & + & \frac{bht-ait}{bnc+ic} \end{array}\right| \quad -> \quad \vec{g}\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{dn+k}{bn+i} \\ \frac{di-bk}{bnc+ic} \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{ant-ht}{bn+i} \\ \frac{bht-ait}{bnc+ic} \end{pmatrix}$$

9.8.5 Allgemein

Normalvektor $\vec{n}\ von\ ax+by+cz=d \quad -> \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

Abstand eines Punktes $ax+by+cz=d=\dfrac{|d|}{\sqrt{|a|^2+|b|^2+|c|^2}}$

Winkel zwischen g und E $\sin(\delta)=\dfrac{|\vec{n}_1\cdot\vec{u}_2|}{|\vec{n}_1|\cdot|\vec{u}_2|}$

Winkel zwischen E1 und E2 $\cos(\delta)=\dfrac{|\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2|}{|\vec{n}_1|\cdot|\vec{n}_2|}$

9.8.6 Abstand Punkt-Ebene berechnen

$q=\dfrac{|\vec{n}*(\vec{r}_P-\vec{r}_A)|}{|\vec{n}|}$ q = Abstand des Punktes von der Ebene $\vec{n}$ = Normalvektor

$\vec{r}_P$ = Vektor zum Punkt $\vec{r}_A$ = Vektor zu einem beliebigen Punkt in der Ebene

10 Anhang – Geometrie

10.1 *Dimensionskontrolle*

Der Begriff *Dimension* hat verschiedene Bedeutungen.
In diesem Kapitel geht es um die Dimension einer *physikalischen Grösse.*

Beispiele:
- Die Grössen 5 m , 7 km und 4 Meilen haben die Dimension **Länge.**
- Die Grössen 84 g , 23 kg und 5 t haben die Dimension **Masse.**
- Die Grössen 7 m/s und 60 km/h haben die Dimension **Länge : Zeit**

Unter der Dimension einer physikalischen Grösse versteht man die Beziehung (Formel) dieser Grösse zu den Basisgrössen (Länge, Zeit, Masse, el. Stromstärke, Temperatur, Lichtstärke, Stoffmenge).

Beispiele: $\text{dim (Geschwindigkeit)} = \dfrac{\text{Länge}}{\text{Zeit}}$

$$\text{dim (Kraft)} = \frac{\text{Masse} \cdot \text{Länge}}{(\text{Zeit})^2}$$

Alle in der Geometrie vorkommenden Grössen (Streckenlänge, Flächeninhalt, Volumen und Winkel) können auf die Dimension **Länge** (Symbol: L) zurückgeführt werden:

$$\text{dim (Streckenlänge)} = L$$
$$\text{dim (Flächeninhalt)} = L \cdot L = L^2$$
$$\text{dim (Volumen)} = L \cdot L \cdot L = L^3$$
$$\text{dim (Winkel)} = \frac{L}{L} = 1 \quad \text{(Winkel im Bogenmass: rad)}$$

Grössen können nur dann **addiert** oder **subtrahiert** werden, wenn sie dieselbe Dimension haben.

Beispiele:
1) 2.3 m – 80 cm + 4 yard ist definiert
2) 9 m^2 + 7 ist nicht definiert, weil 7 nicht die Dimension L^2 h
3) 36 cm + 43 kg ist nicht definiert

Beachten Sie den Unterschied zwischen **Dimension** und **Einheit:**
"Dimension" ist der allgemeinere Begriff, denn für eine vorgegebene Dimension gibt es meistens verschiedene Einheiten.

Beispiel: dim (A) = L^2, Einheiten von A : cm^2, m^2, Are, . . .
dim (V) = L^3, Einheiten von V : cm^3, m^3, Liter, . . .

10.2 *Der mathematische Lehrsatz*

10.2.1 **Der Aufbau eines mathematischen Lehrsatzes**

In der Mathematik ist es üblich, dass man zu einer Behauptung auch die Bedingungen nennt, unter denen sie gilt.
Deshalb bestehen mathematische Sätze häufig aus:

1. den Bedingungen, die man zugrunde legt. Man nennt sie **Voraussetzung** des Satzes.
2. der Folgerung, die man aus der Voraussetzung zieht. Sie heisst **Behauptung** des Satzes.

Um Voraussetzung und Behauptung besser zu trennen, formuliert man mathematische Sätze häufig in der **Wenn-dann-Form**.
Bezeichnen wir die Voraussetzung mit A und die Behauptung mit B, dann lautet das Schema für eine Wenn-dann-Aussage:

Wenn A , dann B

$$A \Rightarrow B$$

Eine Wenn-dann-Aussage nennt man **Implikation**.
Üblicherweise bezeichnet man eine Implikation nur dann als "**Satz**", wenn sie wahr ist.

Beispiele:

(1) - Eine Zahl, die durch 6 teilbar ist, ist auch durch 2 und 3 teilbar.
- **Wenn** eine Zahl durch 6 teilbar ist, **dann** ist sie auch durch 2 und 3 teilbar

(2) - Jedes Parallelogramm ist punktsymmetrisch.
- **Wenn** ein Viereck (oder: eine Figur) ein Parallelogramm ist, **dann** ist es punktsymmetrisch.

(3) - Im Dreieck sind zwei Seiten zusammen immer länger als die dritte Seite.
- **Wenn** drei Strecken ein Dreieck bilden, **dann** sind je zwei zusammen länger als die dritte.

10.2.2 Wahre und falsche Implikationen

Um zu zeigen, dass eine Implikation **wahr** ist, muss man sie beweisen.
Um zu zeigen, dass eine Implikation **falsch** ist, genügt ein einziges **Gegenbeispiel**
Ein Gegenbeispiel erfüllt die Voraussetzung, nicht aber die Behauptung.

Beispiel:
Die Implikation "n ist durch 3 teilbar $\Rightarrow$ n ist durch 6 teilbar" ist falsch.
Gegenbeispiel: $n = 9$

Allgemein gilt:

Die Implikation $A \Rightarrow B$ ist wahr, wenn gilt:

$L_A \subset L_B$ (L_A ist Teilmenge von L_B)

L_A : Lösungsmenge der Voraussetzung
L_B : Lösungsmenge der Behauptung

Ist $L_A = L_B$, so sind $A \Rightarrow B$ <u>und</u> $B \Rightarrow A$ wahr. Man schreibt dann $A \Leftrightarrow B$.

Beispiel: Für jede reelle Zahl x gilt: $0 < x < 1 \Rightarrow |x| < 1$
Beachte: Die Implikation $|x| < 1 \Rightarrow 0 < x < 1$ ist falsch.
Gegenbeispiel: $x = -0.4$

10.2.3 Die Umkehrung einer Implikation

Man erhält die Umkehrung einer Implikation $A \Rightarrow B$, indem man Voraussetzung und Behauptung vertauscht: $B \Rightarrow A$.

Beispiel 1:
Satz:

Wenn zwei Rechtecke kongruent sind,	dann sind sie flächengleich.

Umkehrung:

Wenn zwei Rechtecke flächengleich sind,	dann sind sie kongruent.

Die Umkehrung ist falsch!
Gegenbeispiel: Länge 4 cm, Breite 3 cm und Länge 6 cm , Breite 2 cm.

Beispiel 2:
Satz:
Wenn ein Dreieck gleichseitig ist, dann sind alle Winkel gleich gross.
Umkehrung:
Wenn in einem Dreieck alle Winkel gleich gross sind, dann ist es gleichseitig.

Die Umkehrung ist wahr.

Wie die beiden Beispiele zeigen, gilt:

> Die Umkehrung einer wahren Implikation kann wahr oder falsch sein.

Sind eine Implikation und ihre Umkehrung wahr (wie im 2. Beispiel), so schreibt man:

$\boxed{A \Leftrightarrow B}$ gesprochen: A ist **äquivalent** zu B,
oder
A gilt **genau dann**, **wenn** B gilt.

Beispiel 2:
Ein Dreieck ist **genau dann** gleichseitig, **wenn** alle Winkel gleich gross sind.

Man erhält die Umkehrung einer Implikation $A \Rightarrow B$, indem man Voraussetzung und Behauptung vertauscht: $B \Rightarrow A$.

Beispiel 1:
Satz:

Wenn zwei Rechtecke kongruent sind,	dann sind sie flächengleich.

Umkehrung:

Wenn zwei Rechtecke flächengleich sind,	dann sind sie kongruent.

Die Umkehrung ist falsch!
Gegenbeispiel: Länge 4 cm, Breite 3 cm und Länge 6 cm , Breite 2 cm.

Beispiel 2:
Satz:
Wenn ein Dreieck gleichseitig ist, dann sind alle Winkel gleich gross.
Umkehrung:
Wenn in einem Dreieck alle Winkel gleich gross sind, dann ist es gleichseitig.

Die Umkehrung ist wahr.

Wie die beiden Beispiele zeigen, gilt:

> Die Umkehrung einer wahren Implikation kann wahr oder falsch sein.

Sind eine Implikation und ihre Umkehrung wahr (wie im 2. Beispiel), so schreibt man:

$\boxed{A \Leftrightarrow B}$ gesprochen: A ist **äquivalent** zu B,
oder
A gilt **genau dann**, **wenn** B gilt.

Beispiel 2:
Ein Dreieck ist **genau dann** gleichseitig, **wenn** alle Winkel gleich gross sind.

Stichwortverzeichnis