Elastizität

Relative Veränderungen von zwei Dimensionen (z.B. Preis und Menge) in einer Funktion (z.B. Nachfragefunktion).

Formel	**Beispiel/ Ergänzungen**
Allgemeinde Definition: Elastizität von y bezüglich x $$\varepsilon_{y,x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \cdot \frac{x}{y}$$	$\varepsilon_{y,x} = -2 \rightarrow Erhöhung\ x\ um\ 1\%\ bewirkt\ abnahme\ y\ um\ 2\%.$
Elastizität bezüglich Nachfrage eines Preises im Punkt P(x, p) $$\varepsilon_{x,p} = \frac{\Delta x}{\Delta p} \cdot \frac{p}{x}$$	$$\varepsilon_{x,p} = \frac{\text{relative Änderung x}}{\text{relative Änderung p}}$$
Ist die Funktion linear so ist der Quotient die Umkehrfunktion der Steigung $$\varepsilon = \frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{dp}} * \frac{\mathrm{p_0}}{\mathrm{x_0}} = \mathrm{a} * \frac{\mathrm{p_0}}{\mathrm{x_0}} = \varepsilon_0$$	Für nichtlineare Funktion gilt: $$\varepsilon_{x,p} = \frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{dp}} \cdot \frac{p}{x} = \mathrm{x}'(p) \cdot \frac{p}{x}$$
Lineare Nachfragekurve $$a = \frac{\varepsilon_0 \cdot x_0}{p_0}$$	Vielmals Nachfragefunktion nicht bekannt, sondern nur ein Näherungswert der Nachfrage-Elastizität, die nachfragte Menge und der Marktpreis.
Isoelastizität $$y = ax^b; \varepsilon_{y,x} = \mathrm{b}$$	Die Elastizität bleibt konstant.

Nachfrage und Angebot

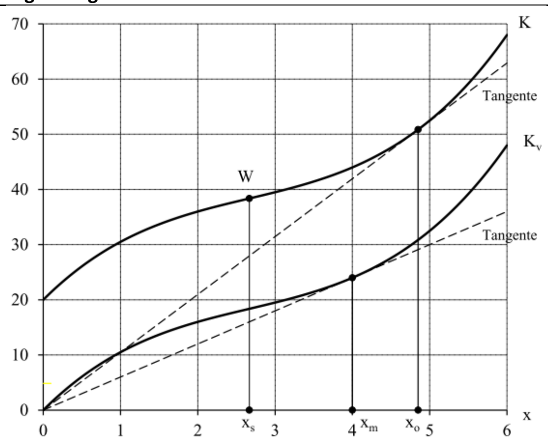
	Angebot ($\varepsilon_{x,p}$ positiv)	**Nachfrage** ($\varepsilon_{x,p}$ negativ)
elastisch	$\varepsilon_{x,p} > 1$	$\varepsilon_{x,p} < -1$
unelastisch	$0 < \varepsilon_{x,p} < 1$	$-1 < \varepsilon_{x,p} < 0$
fliessend (proportional elastisch)	$\varepsilon_{x,p} = 1$	$\varepsilon_{x,p} = -1$

Ist $\boldsymbol{\varepsilon}$ **positiv** handelt es sich um **substitutive Güter**.
Ist $\boldsymbol{\varepsilon}$ **negativ** handelt es sich um **komplementär Güter**.

Übersicht Grössenpaare

Formel	**Beispiel/ Ergänzungen**
Kostenfunktion $$\varepsilon_{K,x} = \frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}x} * \frac{x}{K} = K'(x) * \frac{x}{K}$$	
Nachfragefunktion $$\varepsilon_{x,p} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{dp}} * \frac{p}{x} = \mathrm{x}'(p) \cdot \frac{p}{x}$$	x: Nachgefragte Menge Da die Nachfragefunktion fällt ist die Preiselastizität in aller Regel negativ.
Angebotsfunktion $$\varepsilon_{x,p} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{dp}} \cdot \frac{p}{x} = x'(p) \cdot \frac{p}{x}$$	x: Angebotene Menge Da die Angebotsfunktion steigt ist die Preiselastizität in aller Regel positiv.
Produktionsfunktion $$\varepsilon_{x,r} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}r} * \frac{r}{x} = x'(r) \cdot \frac{r}{x}$$	r: eingesetzte Menge des Produktionsfaktors x: Outputmenge
Konsumfunktion $$\varepsilon_{C,Y} = \frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}Y} \cdot \frac{Y}{C} = C'(Y) \cdot \frac{Y}{C}$$	C: Konsum Y: Einkommen

Beitriebs-optimum und Minimum

Vorgehen	**Ergänzung**
Betriebsoptimum • Im Betriebsoptimum sind die Durchschnittskosten minimal. $k'(x) = 0$ • Im Betriebsoptimum sind die Durchschnitsskosten gleich gross wie die Grenzkosten. $k(x) = K'(x)$ • Die Durchschnittskosten $k(x_0)$ im Betriebsoptimum stellen die langfristige Preisuntergrenze p_{lang} dar. *Betriebsminimum* • Im Betriebsminimum sind die durchschnittlichen variablen Kosten minimal. • Im Betriebsminimum sind die durchschnittlichen variablen Kosten gleich gross wie die Grenzkosten. • Die variablen Durchschnittskosten $k_v(xm)$ stellen die kurzfristige Preisuntergrenze p_{kurz} dar.	
Für quadratische Kostenfunktion gilt: $$x_0 = \sqrt{\frac{c}{a}}$$ Wobei x das Betriebsoptimum ist.	Kostenfunktion kann anhand Daten mit $sys - solv$ erstellt werden.

Partielle Ableitungen

Formel	Beispiel
1. Ordnung $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial x} f(x,y), f'_x, f_x$	$f(x,y) = 4x^3 - 3x^2y + y^3 - 3x - 7y + 20$ $f_x = 12x^2 - 6xy - 3 \rightarrow y_{const} = z.B.\ 10$ $f_y = -3x^2 + 3y^2 - 7$
2. Ordnung: zuerst nach x dann nach y $\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) f, fxy$	$f_{xx} = 24 - 6y;\ f_{yy} = 6y$ $f_{xy} = -6x;\ f_{yx} = -6x$
Partielle Elastizität $\varepsilon_{f,x_i} := \frac{\frac{df_{xi}}{f}}{\frac{dx_i}{x_i}} = \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot \frac{x_i}{f} = f_{x_i} * \frac{x_i}{f}$	$\frac{\partial x}{\partial p} = \frac{\partial}{\partial p}\left[\ln(1+2w)\cdot p^{-0.5}\right] = \ln(1+2w)\cdot(-0.5)\cdot p^{-1.5} = -\frac{\ln(1+2w)}{2p^{1.5}}$ $\varepsilon_{x,p} = \frac{\partial x}{\partial p}\cdot\frac{p}{x} = -\frac{\ln(1+2w)}{2p^{1.5}}\cdot\frac{p}{x} = -\frac{\ln(1+2w)}{2p^{1.5}}\cdot\frac{p}{\ln(1+2w)\cdot p^{-0.5}} = -0.5$
Kreuzpreiselastizität $\varepsilon_{x_i,p_j} = \frac{\partial x_i}{\partial p_j} * \frac{p_j}{x_i}$	Wenn Elastizität positiv, dann handelt es sich um ein substitutives Gut Wenn Elastizität negativ, dann handelt es sich um ein komplementär Gut.
Extrema Kandindaten für Extrema sind die stationären Stellen von f. $\frac{\partial f}{\partial x_i} \rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_1} = 0 \wedge \frac{\partial f}{\partial x_2} = 0 \wedge \ldots \wedge \frac{\partial f}{\partial x_n}$	$f(u,v,w) = u^2 + 2v^2 + 3w^2 - 2uv + 6uw + 10v - 4$ Ableitungen im Gleichungssystem auflösen $\left\vert \begin{array}{rrrrrrr} 2u & - & 2v & + & 6w & = & 0 \\ -2u & + & 4v & + & 0w & = & -10 \\ 6u & + & 0v & + & 6w & = & 0 \end{array} \right\vert$

Integralrechnung

Formel

f(x)	$\int f(x)\,dx$	Bemerkungen
0	C	$C = const.$
x	$\frac12 x^2 + C$	
x^n	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + C$	$n \neq -1$
x^{-1} bzw. $\frac{1}{x}$	$\ln(x) + C$	$x > 0$
e^x	$e^x + C$	

$$yx^n \rightarrow \frac{yx^{n+1}}{n+1}$$

$(ax+b)^n$	$\frac{1}{a}\cdot\frac{(ax+b)^{n+1}}{n+1} + C$	$a \neq 0,\ n \neq -1$
$(ax+b)^{-1}$ bzw. $\frac{1}{ax+b}$	$\frac{1}{a}\cdot\ln(ax+b) + C$	$ax+b > 0,\ a \neq 0$
e^{ax+b}	$\frac{1}{a}\cdot e^{ax+b} + C$	$a \neq 0$

Beispiel

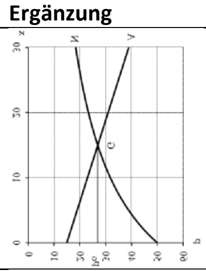
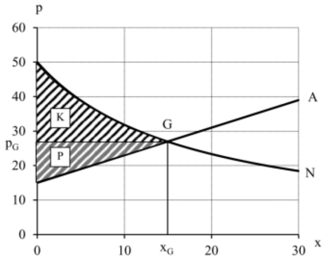
$$24\int(2x+1)^{11}dx - \int e^{-x}dx + \frac{1}{2}\int x^{-\frac{3}{2}}dx + 30\int(16-5x)^{-1}dx$$

$$= \frac{24}{12\cdot 2}(2x+1)^{12} - (-1)e^{-x} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{-\frac{1}{2}}x^{-\frac{1}{2}} + 30\cdot\left(-\frac{1}{5}\right)\ln(16-5x) + C$$

$$= (2x+1)^{12} + e^{-x} - \frac{1}{\sqrt{x}} - 6\ln(16-5x) + C \qquad 16-5x > 0$$

Formel	Beispiel
Das bestimmte Integral $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = F(x)\Big\vert_a^b$	$\int_0^1 (0.5x+1)^{\frac{1}{2}}dx = \frac{1}{\frac{3}{2}}\frac{1}{\frac{1}{2}}(0.5x+1)^{\frac{3}{2}}\Big\vert_0^1 = \frac{4}{3}(0.5x+1)^{\frac{3}{2}}\Big\vert_0^1 \cong 2.45 - 1.33 = 1.12$ **Wichtig!**: Zur Berechnung Integral direkt in Taschenrechner eingeben.

Konsumenten- und Produzentenrente

Vorgehen	Ergänzung
Zur Berechnung der Konsumentrente eignet sich folgendes Verfahren 1. Gleichgewichtspreis p_G über $x_N(p) = x_A(p)$ finden 2. Nullstellen der Umkehrfunktionen bestimmen 3. Konsumentenrente K: $\int_{p_G}^{p_{N_0}} x_N(p)$ 4. Produzentenrente P: : $\int_{p_{A_0}}^{p_G} x_A(p)$	
Oder man macht es wie folgt: 1. Lösung x_G Martgleichgewicht $p_N(x) = p_A(x)$ bestimmen 2. Dann mit x_G den Gleichgewichtspreis p_G bestimmen. 3. Konsumentenrente K: $\int_0^{x_G} p_N(x)dx - p_G * x_G$ 4. Produzentenrente P: : $p_G * x_G - \int_0^{x_G} p_A(x)dx$	

Finanzmathematik

Formel	Beispiel

Variable Kosten anhand Produtionsfunktion

$$K_v(x) = p_r \cdot r(x)$$

Endwert und Barwert

$$K_0, PV = Anfangskpaital, Barwert, Gegenwartswert$$
$$K_n, FV = Kapital\ nach\ n\ Jahren, Endwert$$
$$FV = PV * (1+i)^n$$

Umformung

$$i = \sqrt[n]{\frac{FV}{PV}} - 1;\ n = \log_{1+\mathrm{i}}\left(\frac{FV}{PV}\right)$$

Separations-Prinzip

- Auf ein neu eröffnetes Konto werden CHF 10‘000.- einbezahlt
- Nach 1 Jahr werden CHF 2‘000.- abgehoben, ebenso nach 2 und 4 Jahren.
- Nach 3 Jahren werden CHF 5‘000.-einbezahlt.
- Berechnen Sie den Kontostand nach 4 Jahren. Annahme Zinssatz:10%)

Barwert der Einzahlungen: $10'000 + \frac{5'000}{1.1^3} = 13'756.57$

Barwert der Auszahlungen: $\frac{2'000}{1.1} + \frac{2'000}{1.1^2} + \frac{2'000}{1.1^4} = 4'837.10$

Netto-Barwert der Zahlungen: $13'756.57 - 4'837.10 = 8'919.47$

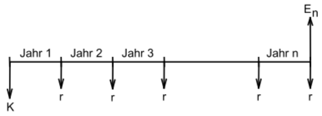
Netto-Endwert der Zahlungen: $8'919.47 \cdot 1.1^4 = 13'059$ Franken

Geometrische Reihen

GF: Geometrische Folge: Quotient aus Glieder bleibt konstant

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = q; q = 1 + i$$

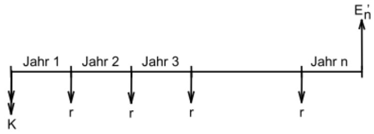
Nachschüssig: Einzahlung nach Jahr 1 mit Jahr n am 31.12



GR: Geometrische Reihe: Summe der Glieder aus GF

$$s_n = a_1 * \frac{q^n - 1}{q - 1};\ s_\infty = \frac{a_1}{1 - q}$$

Vorschüssig: Einzahlung mit Jahr 1 ohne Jahr n am 1.1



Nachschüssiger Rentenendwert

Endwert aus n gleichen Raten

$$s_n = r * \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

Vorschüssiger Rentenendwert

Endwert n Raten nach der letzten Einzahlung

$$s_n' = r * q * \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

Nachschüssiger Rentenbarwert

Barwert aus n gleichen Raten

$$B = \frac{s_n}{q^n} = \frac{r}{q^n} * \frac{q^n - 1}{q - 1}; B_\infty = \frac{r}{q - 1} = \frac{r}{i}$$

Vorschüssiger Rentenbarwert

Barwert aus n gleichen Raten vor erster Einzahlung

$$B' = \frac{s_n'}{q^n} = \frac{r}{q^{n-1}} * \frac{q^n - 1}{q - 1}; B_\infty' = \frac{r * q}{q - 1} = \frac{r(1+i)}{i}$$

Nachschüssiges Endkaptial (Sparkassenformeln)

Hinzufügen/Entnahme von n-maligen Jahresrenten.

$$E_n = K * q^n + / - r * \frac{q^n - 1}{q - 1};$$

Vorschüssiges Endkaptial

Endkapital nach der letzten Einzahlung

$$E_n' = K * q^n + r * \mathrm{q}\frac{q^n - 1}{q - 1}$$

Umformungen Nachschüssiges Endkapital

Zahlung: $c = (a - b * y^{-t}) * \frac{i}{1 - y^{-t}}$

$$TR: expr - eval\ mit\ x = \frac{c}{y - 1} = \frac{+/-\ c}{i}$$

Zeitperioden: $\log_y \frac{b - x}{a - x}$

Anfangskapital a: $x + (b - x) * y^{-t}$

Endkapital b: $x + (a - x) * y^t$

Umformungen Vorschüssiges Endkapital

Zahlung: $c = \frac{(a - b * y^{-t})}{y} * \frac{i}{1 - y^{-t}}$

$$TR: expr - eval\ mit\ x = \frac{c * y}{y - 1} = \frac{+/-\ c * y}{i}$$

Rest analog Naschüssiges Endkapital

Merke: $+ \rightarrow Auszahlung / - \rightarrow Einzahlung$

Tilgung

Schuldbetrag K in n nachschüssigen Annuitäten bezahlen.

Gleichbleibende Tilgung

$$T = \frac{K}{n};\ A = Z + T$$

Gleichbleibende Annuität

$$A = K * q^n * \frac{q - 1}{q^n - 1}$$

Monatliche Tilgung (Barkredit)

$$r = K * q^n * \frac{q - 1}{q^n - 1};\ \mathrm{n = Monatsraten};\ \mathrm{q} = 1 + \mathrm{i_M}$$

Net-Present-Value (Nettobarwert)

$$NPV = -I_0 + \sum_{t=1}^{n} \frac{e_t - a_t}{(1+i)^t} + \frac{L_n}{(1+i)^n}$$

NPV ≥ 0 Die Investition ist vorteilhaft

NPV < 0 Lieber Kapital in Kalkulationszinssatz investieren

Beispiel:	Investitionsbetrag	I_0	= CHF 400 000.-
	Nutzungsdauer (Jahre)	n	= 5
	jährl. Nettoeinzahlungen	$e_1 - a_1$	= CHF 90 000.-
		$e_2 - a_2$	= CHF 120 000.-
		$e_3 - a_3$	= CHF 100 000.-
		$e_4 - a_4$	= CHF 90 000.-
		$e_5 - a_5$	= CHF 80 000.-
	Liquidationserlös	L_5	= CHF 80 000.-

i=10%: $NPV = -400'000 + \frac{90'000}{1.1} + \frac{120'000}{1.1^2} + \frac{100'000}{1.1^3} + \frac{90'000}{1.1^4} + \frac{160'000}{1.1^5} = 16\,942.–$

TR: $f(x) = -400 + 90x + 120x^2 + 100x^3 + 90x^4 + 160x^5 \rightarrow 1\,000 \cdot f\left(\frac{1}{1.1}\right)$

“Standardformel” nachschüssig

$$y^t * a = b + \frac{1 - y^t}{1 - y} * c$$

IRR berechnen bei gleichbleibenden Raten

$$TR: num - solv$$
$$y^t * a - b - \frac{1 - y^t}{1 - y} * c = 0$$
$$y = ? = 0$$

Internal Rate of Return (IRR)

$$NPV = 0$$

Die Investition ist vorteilhaft, wenn der interne Ertragssatz IRR mindestens so hoch ist wie der Kalkulationszinssatz i.

Differenztrechnung IRR

$$NPV_{Diff\ A-B} > 0 \rightarrow A\ ist\ besser\ als\ B$$
$$Für\ i > IRR_{A-B}\ ist\ A\ besser\ als\ B$$

$$NPV = -400'000 + \frac{90'000}{q} + \frac{120'000}{q^2} + \frac{100'000}{q^3} + \frac{90'000}{q^4} + \frac{80'000}{q^5} + \frac{80'000}{q^5} = 0$$

wobei $q = 1 + i$.

$$f(x) = -400 + 90x + 120x^2 + 100x^3 + 90x^4 + 160x^5$$

`TR: num-solv` $\quad f\left(\frac{1}{x}\right) = 0$

liefert bei einem Startwert von z.B. `x=1` die Lösung `x=1.1154251`.

IRR = 11.5%

Unterjährige Verzinsung

Effektiver Jahreszinsatz i = Selbes Endkapital bei jährlichen Verzinsung wie Unterjährlicher.

$$K_1 = K_0\left(1 + \frac{i_{nom}}{m}\right)^m = K_0 * (1 + i); m = Monate$$

effektiver Jahreszinsatz = 12%
Monatszinssatz=? $\quad \sqrt[12]{1.12} = 1.00949 \quad$ Monatszinssatz: 0.949%
nomineller Jahreszinssatz=? $\quad 12 \cdot 0.9488793\% = 11.4\%$
nomineller Jahreszinssatz = **11.4%**

nomineller Jahreszinssatz = 12%
Monatszinssatz=? $\quad \frac{12\%}{12} = 1\%$
effektiver Jahreszinssatz=? $\quad 1.01^{12} = 1.127$
effektiver Jahreszinssatz = **12.7%**

Cobb-Douglas-Produktionsfunktion

$$x(r_1, r_2) = c * r_1^{\alpha_1} * r_2^{\alpha_2}$$
$$K(r_1, r_2) = p$$

Bei der Gewinnmaximierung lohnt es sich das Gleichungssystem zu logarithmieren. $\ln(m * n) = \ln(m) + \ln(n)$

$$\ln\left(\frac{m}{n}\right) = \ln(m) - \ln(n)$$

$$\begin{vmatrix} r_1^{-0.4} r_2^{0.3} & = & 0.5 \\ r_1^{0.6} r_2^{-0.7} & = & 2 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} -0.4 \cdot \overset{x}{\ln(r_1)} + 0.3 \cdot \overset{y}{\ln(r_2)} & = & \ln(0.5) \\ 0.6 \cdot \ln(r_1) - 0.7 \cdot \ln(r_2) & = & \ln(2) \end{vmatrix}$$

`TR: sys-solv:`

$x = \ln(r_1) = 2.772...$ und $y = \ln(r_2) = 1.386...$

$r_1 = e^{2.772...} = 16$ und $r_2 = e^{1.386...} = 4$ (`TR:` e^x und e^y)

Pigousteuer

$$TK = ERK + EFK$$

$ERGK = |EFGK|$ -> Steuer

Grenzwertlösung:

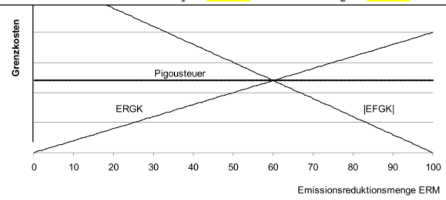
1. Berechnen der zu reduzierenden Emissionen
2. Berechnen Emissionsreduktionskosten anhand Emissionsreduktionsgrenzkostenfunktion

Abgabelösung:

3. Gleichungssystem auflösen -> ergibt zu reduzierende Emissionen

$$x_1 + x_2 = Abgabe$$
$$y_1 = y_2$$

4. Berechnen Emissionsreduktionskosten anhand Emissionsreduktionsgrenzkostenfunktion



Totale Kosten = Emmissionsreduktionskosten + Emissionsfolgekosten

Abgabelösung:

$y_2 = 5 \quad 0.1x_2^2 = 5 \quad x_2 = 7.07\,ME$

$$ERK_2 = \int_0^{7.07} 0.1x_2^2 dx_2 = 11.78\,GE$$

$Emissionsmenge_2 = 10 - 7.07 = 2.93\,ME$

$Abgabe_2 = 5 \cdot 2.93 = 14.65\,GE$

Grenzwertlösung:

$$\begin{vmatrix} x_1 + x_2 = 4 \\ 2 + 0.5x_1 = e^{0.4x_2} - 1 \end{vmatrix}$$

Nach x_1 auflösen und in Gleichung einsetzen.
Mit $num - solv$ Gleichung auflösen.

Polypol und Monopol

Eigenschaft	Monopol	Polypol
Marktpreis	Preis-Absatz-Funktion p(x) entspricht Nachfragefunktion $\mathrm{E(x) = p(x) * x}$	Markpreis p ist konstant $\mathrm{E(x) = p * x}$
Gewinnmaximum	$E'(x) = K'(x)$ $\mathrm{G}_{max} = (\mathrm{p_G} - \mathrm{k(x_G)}) * \mathrm{x_G}$	$\mathrm{p} = K'(x)$
Gewinnmaximierung	$G(x_1, x_2) = (p_1(x_1, x_2) * x_1 + p_2(x_1, x_2) * x_2)) - K(x_1, x_2)$ Partielle Ableitungen von G_{x_n} Gleichungssystem auflösen	$G(x_1, x_2) = (p_1 * x_1 + p_2 * x_2) - K(x_1, x_2)$ Partielle Ableitungen von G_{x_n} Gleichungssystem auflösen
ertragsgesetzlich KV	$\mathrm{G}(x) = \mathrm{E}(x) - K(x)$	$\mathrm{G}'^{(x)} = \mathrm{E}'^{(x)} - K'^{(x)} = 0$

Taschenrechner

Eine Funktion mit mehreren Variablen Werten ausrechenen

```
2nd + expr-eval (table) + <enter> function + <set> parameter values + <enter>
```

By Janik von Rotz and Mike Monticoli