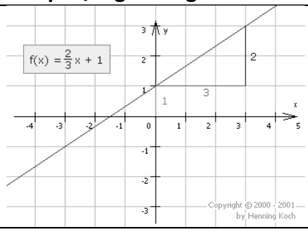
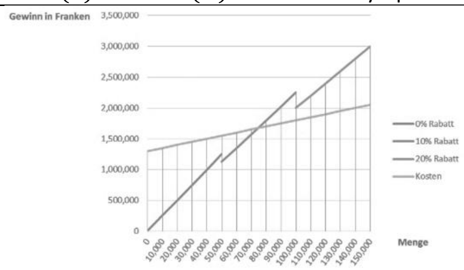
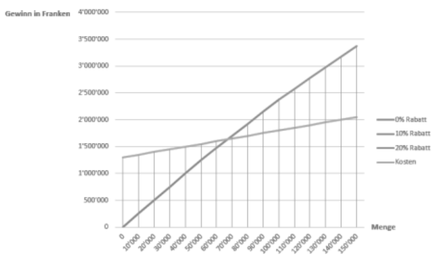
Zahlensysteme

Formel	**Beispiel**
Vorkomma und Nachkomma: $\sum_{k=0}^{n} a^{n-k}$	45.0625 vom 6er ins 10er System Vorkomma: $1*6^2+1*6^1+3*6^0=36+6+3=45$ Nachkomma: $3*6^{-3}+4*6^{-2}+0*6^{-1}=\frac{1}{72}+\frac{1}{9}+0=0.125$
Vorkomma: Der Zahlenwert wird durch die Ziel-Zahlensystem-Basis geteilt. Der jeweilige Rest bildet den neuen Wert. Nachkomma: Die Kommazahl mal die Basis rechnen, Ganzzahlziffern bilden den neuen Wert	45.0625 vom 10ner ins 6er System Vorkomma: $45:6=7\ Rest: 3$ $7:6=1\ Rest: 1$ $1:6=0\ Rest: 1\quad Resultat: 113$ Nachkomma: $6*0{,}125=0{,}75\ Ganzzahl: 0$ $6*0{,}75=4{,}5\ Ganzzahl: 4$ $6*0{,}5=3\ Ganzzahl: 3\quad Resultat: 0{,}043$

Funktionen

Formel	**Beispiel/Ergänzungen**
Lineare Funktion $f(x)=ax+b$ Steigung $a=\frac{\Delta y}{\Delta x}$ Fixkosten $f(0)=K_f=K-ax$	
Polynomfunktion $f(x)=\sum_n^i a_{n-i}x^{n-i}$	Eine Polynomfunktion vom Grad n besitzt höchstens n Nullstellen Der qualtiative Verlauf des Graphen hängt für grosse |x| nur vom Term der höchsten Potenz ab.
Quadratische Funktion $f(x)=ax\hat{}2+bx+c$	Lösungen berechnen $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$
Potenzfunktion $f(x)=a*x^n$	Ist n gerade erhält man eine Parabel. Ist n ungerade erhält man eine konkav-konvexe Parabel
Exponentialfunktion $f(x)=K*a\hat{}x$	Funktion hat keine Nullstellen x-Achse ist die Asymptoten Graph steigt wenn a>1 Graph fällt wenn 0<a<1
Logarithmusfunktion $f(x)=log(x)$	Umkehrfunktion der Exponentialfunktion $-0.2+3=log(x)\rightarrow 10^{-0.2+3}=x$
Gebrochen-rationale Funktion $D_f=R$ $f(x)=\frac{Polynom\ m-ten\ Grades}{Polynom\ n-ten\ Grades}=\frac{Z(x)}{N(x)}$	x ist Nullstelle von f wenn → $Z(x)\neq 0(und\ N(x)\neq 0)$ senkrechte Asymptote wenn $N(x)=0(und\ Z(x)\neq 0$ $Grad(Z)=Grad(N)$ horizontale Asymptote (parallel zur X-Achse) -> zur Berechnung siehe Asymptote $Grad(Z)\ <\ Grad(N)$ x-Achse ist Asymptote
Stückweis definierte Funktion Funktion aufstellen $W(x)\begin{cases}W1=25x & 0\leq x<50'000\\ W2=25x*0.9 & 50'000\leq x<100'000\\ W3=25x*0.8 & 100'000\leq x\end{cases}$ $W2\ =25*0.9*50'000=1'125'000\ \ \|\|\ 1'125'000\ /\ 25\ =\ 45'000$ $W3\ =25*0.8*100'000=2'000'000\ \|\|\ 2'000'000/(25*0.9)\ =88'888$ Die Mengen von 45'000-50'000 und 88'888-100'000 werden nicht bestellt. $W1\ =\ 25*50'000\ =\ 1'250'000$ $W2\ =\ 25*50'000*0.9\ =\ 1'125'000$ $W2-W1\ =\ 125'000$ $\text{W2 Neu}\ =\ 25x*0.9+125'000$ $W2\ =\ 25*100'000*0.9+125'000\ =\ 2'375'000$ $W3\ =\ 25*100'000*0.8=\ 2'000'000$ $W3-W2\ =\ 375'000$ $\text{W3 Neu}\ =\ 25x*0.8+375'000$ $W(x)\begin{cases}W1=25x & 0\leq x<50'000\\ W2=25x*0.9+125'000 & 50'000\leq x<100'000\\ W3=25x*0.8+375'000 & 100'000\leq x\end{cases}$	 

Umkehrfunktion

Funktion	**Beispiel**
$p(x)\ \rightarrow x(p)$	$x\rightarrow p=-1.25x+9$ $p\rightarrow x=-0.8p+7.2$
Umkehrung Logarithmusfunktion	$y=3^x\rightarrow x=\log_3(y)$

Ableitung

Die Ableitungsfunktion beschreibt die Veränderung der Funktion und die Tangentensteigung an einem bestimmten Punkt.

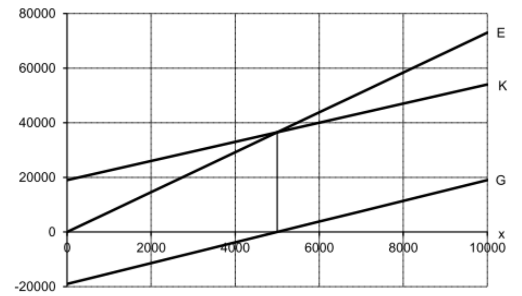
Aus $\frac{df}{dx} = f'(x)$ folgt formal die Beziehung:

$$\boxed{df = f'(x) \cdot dx}$$

Differenziale: df entspricht der Veränderung von y, z.B. die Zunahme von Kosten. **dx** beschreibt die Mengenzunahme.
Oft wird für dx=1 gewählt, da es am interessantesten ist, was kostet mich ein Stück mehr.
Es gilt, je grösser dx desto ungenauer ist df.

Formel	**Beispiel**
Erste Regeln $f(x) = c \rightarrow f'(x) = 0$ $f(x) = x \rightarrow f'(x) = 1$ $f(x) = ax + b \rightarrow f'(x) = a$	$f(x) = 23 \rightarrow f'(x) = 0$ $f(x) = 4x \rightarrow f'(x) = 4$ $f(x) = 6x + 34 \rightarrow f'(x) = 6$
Potenzregel $f(x) = ax^n \rightarrow f'(x) = n * x^{n-1} * a$	$f(x) = 3x^4 \rightarrow f'(x) = 4 * x^{4-1} * 3 = 12x^3$ Spezialfälle: $f(x) = x^{-1} = \frac{1}{x} \rightarrow f'(x) = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$ $f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} \rightarrow f'(x) = \frac{1}{2} * x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2 * \sqrt{x}}$
Faktorregel $f(x) = c * g(x) \rightarrow f'(x) = c * g'(x)$	$f(x) = 5x^2 \rightarrow f'(x) = 5 * 2x$
Summenregel $f(x) = v(x) + w(x) \rightarrow f'(x) = v'(x) + w'(x)$	$f(x) = 6x^2 - 3x + 2 \rightarrow f'(x) = 12x - 3$
Eulersche Zahl $f(x) = e^x \rightarrow f'(x) = e^x * 1$	$f(x) = 3e^{2x^3} \rightarrow f'(x) = 3e^{2x^3} * 6x^2$
Potenz $f(x) = a^x \rightarrow f'(x) = a^x * \ln(a) * 1$	$f(x) = 5^{3x^2-1} \rightarrow f'(x) = 5^{3x^2-1} * \ln(5) * 6x$
Natürlicher Logarithmus $f(x) = \ln(x) \rightarrow f'(x) = \frac{1}{x} * 1$	$f(x) = \ln(2x^3) \rightarrow f'(x) = \frac{1}{2x^3} * 6x^2$
Logarithmus $f(x) = log_a(x) \rightarrow f'(x) = \frac{1}{x * \ln(a)} * 1$	$f(x) = log_{10}(x^3 - 3) \rightarrow f'(x) = \frac{1}{(x^3-3) * \ln(10)} * 3x^2$
Produktregel $f(x) = v(x) * w(x) \rightarrow f'(x) = v'(x) * w(x) + v(x) * w'(x)$	$f(x) = (7x^2 + 10x + 4) * (\log_6(x))$ $f'(x) = \left((14x + 20) * \log_6 x\right) + \left((7x^2 + 10x + 4) * \frac{1}{x \ln(6)}\right)$
Quotientenregel $f(x) = \frac{v(x)}{w(x)} \rightarrow f'(x) = \frac{v'(x) * w(x) - v(x) * w'(x)}{w(x)^2}$	$f(x) = \frac{3x^2 + 2x}{\sqrt{x}} \rightarrow$ $f'(x) = \frac{(6x + 2 * \sqrt{x}) - \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} * (3x^2 + 2x)\right)}{x}$
Kettenregel $f(x) = h(g(x)) = h(u), u = g(x) \rightarrow f'(x) = h'(u) * g'(x)$	$f(x) = (15x^5 + 8x^4)^4 \rightarrow$ $f'(x) = 4(15x^5 + 8x^4)^3 * (75x^4 + 32x^3)$

Wirtschaft

Beschreibung	**Formel**	**Grafik**
Erlös	$E(x) = p(x) * x$	
Variable Kosten	$K_v(x) = x * k$	
Gesamtkosten	$K(x) = K_v + K_f = x * k + d$	
Fixkosten	$K_f(x) = K(x) - K_v(x) = d$	
Gewinn	$G(x) = E(x) - K(x)$	
Deckungsbeitrag	$G_D(x) = E(x) - K_v(x)$ $pro\ Stück\ g_D = \frac{G_D}{x} = p(x) - k_v$	
Gewinnschwelle	$G_S = \frac{K_f}{p-k}$	
Marginale Konsum- und Sparquote für Einkommen Y	$Y = C(Y) + S(Y)$	

Begriffe	**Funktion**
Grenz, Marginal = Ableitung	$f'(x)$
Stück, Durchschnitt	$\bar{f}(x) = \frac{f(x)}{x}$
Grenz-Durchschnitt	$(\bar{f}(x))'$

Asymptoten

Typ

Senkrechte Asymptote

Entsteht wenn bei einer Gebrochenen Rationalen Funktion der Nenner 0 ist.

Beispiel: $f(x) = \frac{1}{x-1}$

Nenner 0 setzen: $x - 1 \; = \; 0 \rightarrow x \; = \; 1$

Senkrechte Asymptote verläuft durch 1

Waagerechte Asymptote

Für die Waagerechte / Schiefe Asymptote benötigt man die Zähler- und Nennergerade.

Dies ist die Potenz welche im Zähler und Nenner vorkommt.

$\frac{(4x^3+2x^2)}{5x^2}$ →Hier wäre die Zählergerade 3 und Nennergerade 2.

Wenn Zählergerade < Nennergerade: dann ist x-Achse die Asymptote.

Wenn Zählergerade = Nennergerade: Asymptote berechnen.

Beispiel: $f(x) = \frac{4x^2+3}{2x^2+1}$

→ Zählergerade und Nennergerade sind 2.

Koeffizienten vor den Unbekannten mit den höchsten Potenzen im Zähler und Nenner dividieren.

$y = \frac{4}{2} \; = \; 2$ →Waagerechte Asymptote parallel zur X-Achse auf der Höhe y=2.

Darstellung mit Limes:

$$\lim_{x\to\infty} y = \frac{4x^2+3}{2x^2+1} * \frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^2}} = \frac{4+\frac{3}{x^2}}{2+\frac{1}{x^2}} = \frac{4}{2} = 2$$

Schiefe Asymptote

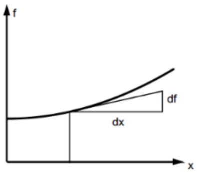
Wenn Zählergerade um eins grösser ist als Nennergerade.

Grafik

	Kriterium
Zählergrad bestimmen	Höchste Potenz im Zähler
Nennergrad bestimmen	Höchste Potenz im Nenner
Asymptoten berechnen	
Senkrechte Asymptote	Nullstelle des Nenners (= Definitionslücke)
Waagerechte Asymptote	Zählergrad < Nennergrad oder Zählergrad = Nennergrad
Schiefe Asymptote	Zählergrad = Nennergrad + 1
Nullstellen berechnen	$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} \quad \rightarrow \quad P(x_0) = 0 \text{ und } Q(x_0) \neq 0$
Polstelle	$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} \quad \rightarrow \quad Q(x_0) = 0 \text{ und } P(x_0) \neq 0$
Hebbare Definitionslücke	$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} \quad \rightarrow \quad Q(x_0) = 0 \text{ und } P(x_0) = 0$
Grenzwert einer gebrochenrationalen Funktion	

Funktionsänderung

$$df = f'(x) * dx \approx \Delta f$$
$$\Delta f = f(x + dx) - f(x)$$



Kurvendiskussion

Die Kurvendiskussion umfasst Monotonie, Krümmung, Extremwerte, Wendepunkte und Asymptoten. Alle diese Werte stehen im Zusammenhang miteinander (die leeren Stellen sind nur rechnerisch erkennbar):

	Nullstellen	**E**xtrema	**W**endepunkte
f	x	y	z
f'	y	z	
f''	z		

Monotonie

Erklärung

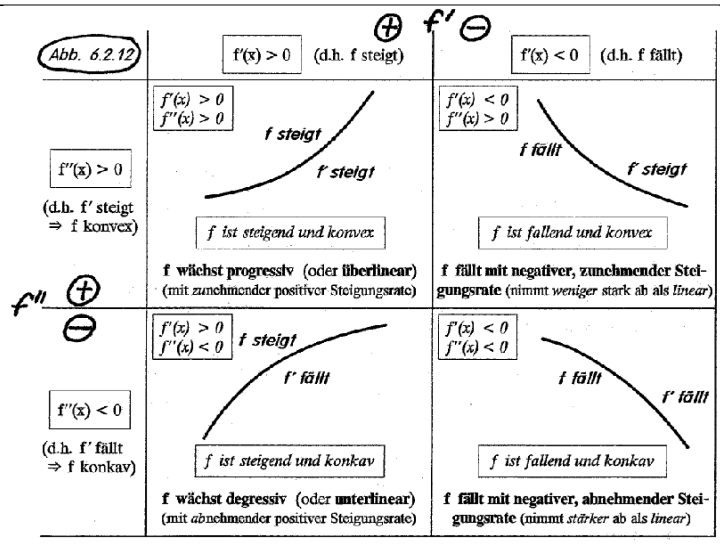
$f'(x) > 0 \; und \; f''(x) > 0 \; \rightarrow f \; wächst \; konvex \; streng \; monoton$
$f'(x) > 0 \; und \; f''(x) < 0 \rightarrow \; f \; wächst \; konkav \; streng \; monoton$
$f'(x) < 0 \; und \; f''(x) > 0 \rightarrow \; f \; fällt \; konvex \; streng \; monoton$
$f'(x) < 0 \; und \; f''(x) < 0 \; \rightarrow f \; fällt \; konkav \; streng \; monoton$

Monotonie: fällt oder steigt
Krümmung: konvex oder konkav

Beispiel:

$K(x) = \frac{1}{15}x^3 - 2x^2 + 60x + 900$
$K'(x) = 0.2x^2 - 4x + 60$
$K''(x) = 0.4x - 4$
$K''(x) = 0$ an der Stelle x=10.
Für $x < 10$ gilt: $K''(x) < 0$ (K ist konkav.)
Zusammen mit $K'(x) > 0$* gilt: K wächst degressiv.
Für $x > 10$ gilt: $K''(x) > 0$ (K ist konvex.)
Zusammen mit $K'(x) > 0$* gilt: K wächst progressiv.

Grafik



Extremwerte

f hat an der Stelle x ein relatives Maximum oder Minimum → $f'(x) = 0$

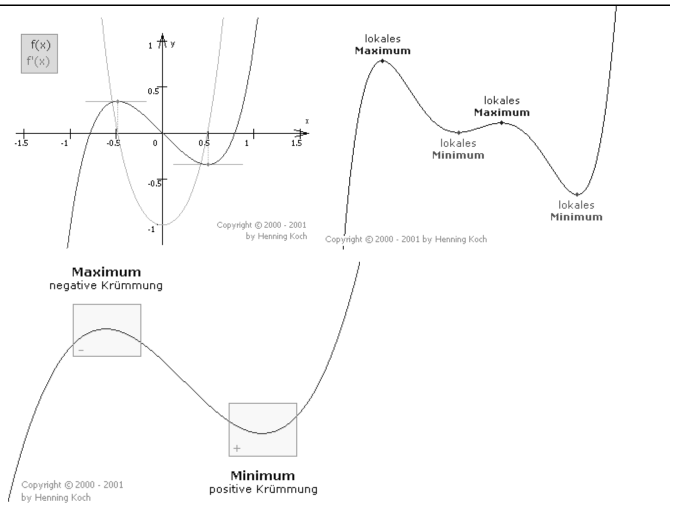
Erklärung

$f'(x) = 0$
$f''(x) > 0$
f hat an der Stelle x ein relatives Minimum

$f'(x) = 0$
$f''(x) < 0$
f hat an der Stelle x ein relatives Maximum

Beispiel:
$f(x) = \frac{1}{6}x^3 - \frac{5}{4}x^2 + 2x + 3$ hat die stationären Stellen $x = 1$ und $x = 4$
$f''(x) = x - 2.5$
$f''(1) = 1 - 2.5 < 0$ f hat also ein relatives Maximum an der Stelle x=1.
$f''(4) = 4 - 2.5 > 0$ f hat also ein relatives Minimum an der Stelle x=4.

Grafik



Wendepunkte

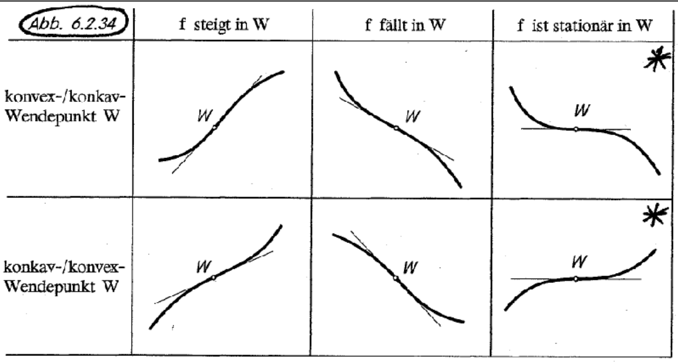
f hat an der Stelle x einen Wendepunkt → $f''(x) = 0$

Erklärung

$f''(x) = 0$
$f'''(x) \neq 0$
f hat an der Stelle x einen Wendepunkt
$f''(x) = 0$
$f'''(x) > 0$
f hat an der Stelle x einen konkaver/konvex Wendepunkt
$f''(x) = 0$
$f'''(x) < 0$
f hat an der Stelle x einen konvex/konkaver Wendepunkt

Beispiel:
$f'(x) = \frac{1}{6}x^3 - x^2 + \frac{3}{2}x$
$f''(x) = 0.5x^2 - 2x + 1.5$
$f'''(x) = x - 2$
$f''(x) = 0$ → `TR: poly-solv` liefert $x = 1$ sowie $x = 3$
$f'''(1) = 1 - 2 < 0$ konvex-konkaver Wendepunkt bei x=1
$f'''(3) = 3 - 2 > 0$ konkav-konvexer Wendepunkt bei x=3
Ausserdem ist $f'(3) = 0$. Der Wendepunkt bei x=3 ist also ein Sattelpunkt

Grafik



Taschenrechner

Aufgabe	**Instruktionen**

Polynome lösen	`2nd + ploly-solv (cos/cos-1) + 1 oder 2 + <Enter values> + Solve`
	Optional:
	`Store x1 als x Variable und x2 als y Variable, x3 als z Variable`

Resultat bekannt - x-Werte für bestimme Funktion berechnen	Variante 1:
	`table + 2 + <Enter function>`
	`table + <Lookup value>`
	Variante 2:
	`<Funktion umformen> + 2nd + ploly-solv (cos/cos-1)`
	Variante 3:
	`2nd + num-solv (sind/sin-1) + <Enter equation>`

Funktion anhand x und y Werten erstellen lassen	`data + <Enter values>` `2nd + data + 4 (linReg)`
Ableiten von Funktionswerten	`table + 2 <Edit function> + 2nd + d/dx (ln log) + <Enter function> und <Enter x definition (normally x)>`
Ableitung kontrollieren	`table + 2 <Edit function> + <Enter Ableitung> + (-) + 2nd + d/dx (ln log) + <Enter function> und <Enter x definition (normally x)>` Das Resultat sollte dann nahe zu 0 sein.
Gleichungssysteme lösen	`sys-solv`

By Janik von Rotz and Mike Monticoli (and Luca Kündig)